

GRUPOS DE LIE.

Codificación de colores:

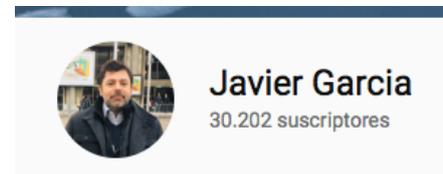
Resaltar resultados: azul

Cálculos aclaratorios: rojo

Recordatorio fórmulas: verde

Apuntes basados el los vídeo-cursos de Javier García

<https://www.youtube.com/channel/UCYOv9HwOFwK0IY2dUQIZSpg>

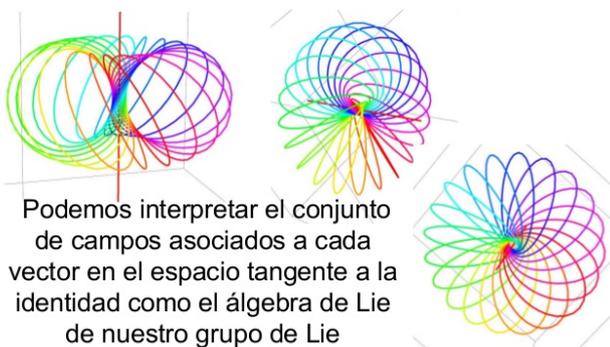


Grupos de Lie

Grupos de Lie - Capítulo 1 • 37:55

Grupos de Lie - Capítulo 2 • 58:36

VER LISTA DE REPRODUCCIÓN COMPLETA (17 VÍDEOS)



Podemos interpretar el conjunto de campos asociados a cada vector en el espacio tangente a la identidad como el álgebra de Lie de nuestro grupo de Lie



(Sophus Lie, 1842-1899 Noruega)

GRUPOS DE LIE.

VÍDEO 1/17. INTRODUCCIÓN GRUPOS DE LIE (1/2).

VÍDEO 2/17 INTRODUCCIÓN GRUPOS DE LIE (2/2).

VÍDEO 3/17. EL GRUPO DE LORENTZ.

VÍDEO 4/17. EL GRUPO $SO(3)$, GENERADORES.

VÍDEO 5/17. Rotación de un vector \vec{x} entorno a un eje \hat{n} un cierto ángulo α (Fórmula de RODRIGUE'S).

VÍDEO 6/17. Las constantes de estructura del grupo $SO(3)$ coinciden con las componentes del tensor de Levi-Civita.

VÍDEO 7/17. El grupo $SO(N)$.

VÍDEO 8/17. El grupo $SU(2)$.

VÍDEO 9/17. El grupo $SU(3)$.

VÍDEO 10/17. "ENTENDIENDO EL SPIN SIN MORIR EN EL INTENTO (1/3)".

VÍDEO 11/17. "ENTENDIENDO EL SPIN SIN MORIR EN EL INTENTO (2/3)".

VÍDEO 12/17. "ENTENDIENDO EL SPIN SIN MORIR EN EL INTENTO (3/3)".

VÍDEO 13/17. "CÁLCULO DEL SPIN"

VÍDEO 14/17. "JUGANDO CON EL SPIN (1/2)" *(Parte 2/2 aún no grabada)*

VÍDEO 15/17. "EL GRUPO DE POINCARÉ 1/3".

VÍDEO 16/17. "EL GRUPO DE POINCARÉ 2/3".

VÍDEO 17/17. "EL GRUPO DE POINCARÉ 3/3".

El curso "Grupos de Lie aún no se da por acabado"

APÉNDICE I: VALORES Y VECTORES PROPIOS.

APÉNDICE II: EL LAGRANGIANO.

APÉNDICE III: TEOREMA DE NOETHER.

APÉNDICE IV: OPERADOR MOMENTO EN QM.

APÉNDICE V: INTRODUCCIÓN A LA RELATIVIDAD ESPECIAL.

APÉNDICE VI: COORDENADAS ESFÉRICAS.

VÍDEO 1/17. INTRODUCCIÓN GRUPOS DE LIE (1/2).

Un Grupo, $(G,+o)$ es un conjunto G y una ley de composición interna $(\forall g_1, g_2 \in G : g_1 o g_2 \in G)$, que cumple las siguientes propiedades:

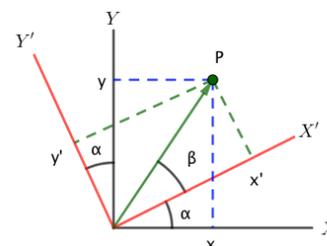
- a) ASOCIATIVA: $(g_1 o g_2) o g_3 = g_1 o (g_2 o g_3)$
- b) IDENTIDAD (Neutro): $\exists ! I \in G / g o I = I o g = g, \forall g \in G$
- c) INVERSO (Simétrico): $\forall g \in G \exists ! g^{-1} \in G / g o g^{-1} = g^{-1} o g = I$

Si además se cumple la propiedad CONMUTATIVA, $g_1 o g_2 = g_2 o g_1$, se dice que el Grupo es Conmutativo o Abeliano, pero no es una propiedad necesaria para que (G,o) sea un grupo.

Empecemos con un ejemplo: nuestra misión va a ser caracterizar una ROTACIÓN en el plano \mathbb{R}^2 . Lo haremos de dos maneras: 1) método trigonométrico y 2) método de la transformación que deja invariable cierta magnitud.

1) Método trigonométrico:

Consideramos rotaciones entorno al origen (esto no supone ninguna pérdida de generalidad, si lo hiciésemos respecto a cualquier otro punto obtendríamos el mismo resultado que buscamos). Tratamos ROTACIONES PASIVAS, es decir, es el sistema de referencia (el observador) el que rota, no el punto. Esta es la forma usual de tratar las rotaciones en física: un observador S ve el punto P con coordenadas x e y , otro observador S' , rotado un ángulo α respecto de S observa P con coordenadas x' e y' .



$$\vec{r} = (x, y)_S = (x', y')_{S'} \longrightarrow \begin{cases} x' = r \cdot \cos\beta \\ y' = r \cdot \sin\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ y = r \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Recordando las fórmulas trigonométricas:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta; \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\alpha \cos\beta - r \sin\alpha \sin\beta = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= r \sin\alpha \cos\beta + r \cos\alpha \sin\beta = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}$$

Que matricialmente se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Para pasar ahora de S a S' necesitamos la matriz inversa, ya que, algebraicamente: $v_S = R \cdot v_{S'} \rightarrow v_{S'} = R^{-1} \cdot v_S$, $(R^{-1} v_S = R^{-1} R v_{S'} = I v_{S'} = v_{S'})$ siempre que exista R^{-1} , es decir, siempre que $|R| \neq 0$. En nuestro caso, $|R| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$, lo que asegura que existe R^{-1} .

Un resultado importante de momento es que nuestra matriz R es tal que: $|R| = 1$

Calculemos $R^{-1} = \frac{1}{|R|} Ad(R^T)$

$$R^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} Ad_{11} &= +\cos\alpha; & Ad_{12} &= -(-\sin\alpha) \\ Ad_{21} &= -\sin\alpha; & Ad_{22} &= +\cos\alpha \end{aligned}$$

Por lo que: $R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R^T$. Otro importante resultado, nuestra matriz R ha de cumplir que: $R^{-1} = R^T$

Por otra parte, como: $R^{-1} = R^T y R \cdot R^{-1} = I \rightarrow R \cdot R^T = I$

Hagamos un cambio de notación: para pasar de S' a S llamaremos $R(\alpha)$ a la matriz de rotación y no R^{-1} o R^T , así tendremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \text{ en general, } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para dos dimensiones:
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 \\ R_{21}x_1 + R_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$x'_1 = \sum_{j=1}^N R_{1j} \cdot x_j$$

Y generalizando:
$$x'_2 = \sum_{j=1}^N R_{2j} \cdot x_j \quad \longrightarrow \quad x'_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} \cdot x_j = R_{ij} \cdot x_j$$

$$x'_n = \sum_{j=1}^N R_{nj} \cdot x_j$$

Donde, en la ultima expresión, hemos usado el convenio del sumatorio de Einstein: "cuando hay dos índices repetidos, se suman para todos los valores posibles".

SINTETIZEMOS: $RR^T = I$; $|R| = 1$; $x'_j = R_{ij}x_j$

Veamos ahora si esto es un GRUPO: $G = \left\{ R \mid RR^T = I \wedge |R| = 1 \right\}$.

Al ser $R(\alpha)$ y $\alpha \in [0, 2\pi]$, tenemos un conjunto INFINITO y CONTINUO (para un ε pequeño, $R(\alpha + \varepsilon) \approx R(\alpha)$, a esto se le llama VARIEDAD). Veamos que este conjunto (infinito y continuo) cumple las propiedades para ser un grupo (GRUPO de LIE):

- se cumple la asociativa: $(R(\alpha_1)R(\alpha_2))R(\alpha_3) = R(\alpha_1)(R(\alpha_2)R(\alpha_3))$, puesto que el producto de matrices cumple la propiedad asociativa.
- Existe elemento neutro: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R(0) \in G : R(\alpha)I = IR(\alpha) = R(\alpha)$, al ser I el neutro para el producto de matrices.
- Existen inversos: $\forall R(\alpha) \exists ! R^{-1}(\alpha) : R^{-1}R = RR^{-1} = I$, puesto que $|R| = 1 \neq 0$, lo que asegura que exista la matriz inversa.

Luego $G = \left\{ R_{2 \times 2} \mid RR^T = I \wedge |R| = 1 \right\}$ forma un grupo infinito y continuo (Grupo de Lie) que se llama $SO(2)$ o grupo uniparamétrico (depende de un solo parámetro α). La "O" es porque es ORTOGONAL ($RR^T = I$, esta propiedad la cumplen todas las matrices de cambio de base ortogonales) y "S" es por SPECIAL ($|R| = 1$)

VÍDEO 2/17 INTRODUCCIÓN GRUPOS DE LIE (2/2).

2) Método de la transformación que deja invariable una magnitud.

Queremos hacer una rotación en \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. No sabemos que vale R , no sabemos trigonometría.

Nos preguntamos: ¿qué es lo que deja invariable una rotación?. Obviamente, la distancia entre el centro de rotación y el punto girado.

Matemáticamente queremos que: $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2} \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = x'^2_1 + x'^2_2 = s^2$. Esta será nuestra magnitud invariable bajo rotación, s^2 .

A partir de esta información, ¿seremos capaces de averiguar las propiedades que tendrá R ? La respuesta es sí:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 \\ R_{21}x_1 + R_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$s^2 = x'^2_1 + x'^2_2 = (R_{11}x_1 + R_{12}x_2)^2 + (R_{21}x_1 + R_{22}x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Desarrollando:

$$R_{11}^2 x_1^2 + R_{12}^2 x_2^2 + 2R_{11}R_{12}x_1x_2 + R_{21}^2 x_1^2 + R_{22}^2 x_2^2 + 2R_{21}R_{22}x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

De donde se debe cumplir que:

$$\begin{cases} R_{11}^2 + R_{21}^2 = 1 \\ R_{12}^2 + R_{22}^2 = 1 \\ R_{11}R_{12} + R_{21}R_{22} = 0 \end{cases}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}; \quad R^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix}; \quad RR^T = \begin{pmatrix} R_{11}^2 + R_{21}^2 & R_{11}R_{12} + R_{21}R_{22} \\ R_{11}R_{12} + R_{21}R_{22} & R_{12}^2 + R_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Luego, la única forma en que s^2 quede invariante es que $RR^T = I$

Más fácilmente (de hecho, más profesionalmente):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}' = R\vec{x};$$

$$\vec{x}'^T = (x_1 \ x_2); \quad \vec{x}'^T \cdot \vec{x} = (x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = s^2, \text{ magnitud que permanece invariante.}$$

Lo mismo ocurre para: $\vec{x}'^T \cdot \vec{x}' = s^2$, luego: $\vec{x}'^T \cdot \vec{x} = \vec{x}'^T \cdot \vec{x}'$. Omitiendo las flechitas de los vectores (no hay confusión: si hay subíndices son componentes, si no los hay se trata de vectores), tenemos: $x^T x = x'^T x' = s^2$, magnitud que ha de permanecer invariante. Como $x' = Rx$ y recordando la propiedad de las matrices que dice: $(MN)^T = N^T M^T$, se tiene que:

$$x'^T x' = (Rx)^T (Rx) = x^T R^T R x = x^T x \rightarrow \text{necesariamente: } R^T R = I$$

La notación es muy importante y nos permite ir mucho más aprisa. Lo visto anteriormente se generaliza rápidamente a cualquier dimensión, no solo a \mathbb{R}^2 si no a \mathbb{R}^n .

Vamos con la idea que tuvo LIE en su momento: una rotación de ángulo θ es lo mismo que rotar un ángulo $\frac{\theta}{N}$ (pequeño) N

(grande) veces: $R(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[R\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]^N$. Es decir, una rotación finita se puede ver como infinitas (N) rotaciones infinitesimales $\left(\frac{\theta}{N}\right)$.

Como rotar un ángulo infinitesimal es casi como no hacer nada, $\lim_{N \rightarrow \infty} R\left(\frac{\theta}{N}\right) \simeq I$, realmente, $\lim_{N \rightarrow \infty} R\left(\frac{\theta}{N}\right) = I + A$, con A "pequeña" (los matemáticos sabrán perdonarnos), es decir, $A^2 = 0$ (aproximación usual en cálculo).

Para una R pequeñísima, $R = I + A$. Para una R finita, $R = (I + A)^N$, A infinitesimal y N tiende a infinito. ¿Qué podemos decir de esta matriz A ?

Como R es una rotación, se ha de cumplir que $R^T R = I$, como $R = I + A$, tendremos que:

$(I + A)^T(I + A) = (I + A^T)(I + A) = I + A + A^T + A A^T = I$; como $A A^T \sim O(A^2) \rightarrow 0$, deducimos que:

$I + A + A^T = I$, por lo que, necesariamente: $A + A^T = 0$, que es la definición de matriz **ANTISIMÉTRICA**. (Hemos usado la propiedad de matrices que dice que $(M + N)^T = M^T + N^T$)

Si A ha de ser antisimétrica, necesariamente ha de ser de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A + A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \end{cases}$$

Por lo que: $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$, en general: si A antisimétrica ($A = -A^T$), $\begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{cases}$

Recopilando:

Rotación infinitesimal $I + A$, con $A^2 = 0$

Rotación finita: $(I + A)^N$; $N \rightarrow \infty$

A Antisimétrica: $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicaremos ahora el teorema de TAYLOR: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$

Como ejemplo: $f(x) = e^x$; $f^n(x) = e^x$; $f^n(0) = 1$: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot B$. ε muy pequeño, $\varepsilon^2 = 0$, así $A^2 = 0$ (A muy "pequeña")

Rotación finita ángulo θ : $R = (I + A)^N = (I + \varepsilon B)^N = \left[I + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^N$; $\varepsilon = \frac{\theta}{N}$

Desarrollaremos en serie de Taylor la expresión: $R(\theta) = \left[I + \frac{\theta}{N} B \right]^N$; I, B son matrices constantes, $N \rightarrow \infty$, desaparecerá al calcular el límite, así que la única variable es θ .

$$R(0) = 1; \quad R'(\theta) = N \left[I + \frac{\theta}{N} B \right]^{N-1} \cdot \frac{B}{N}; \quad R'(0) = N(I)^{N-1} \frac{B}{N} = B$$

$$R''(\theta) = B(N-1) \left[I + \frac{\theta}{N} B \right]^{N-2} \cdot \frac{B}{N}; \quad R''(0) = B(N-1)(I)^{N-2} \frac{B}{N} = B^2 \frac{N-1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} B^2$$

$$R'''(\theta) = \frac{B^2}{N} (N-2)(N-1) \left[I + \frac{\theta}{N} B \right]^{N-3} \cdot \frac{B}{N}; \quad R'''(0) = \frac{B^2}{N} (N-1)(N-2)(I)^{N-3} \frac{B}{N} = B^3 \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} B^3$$

$$\text{Así: } R^{(n)}(\theta) \rightarrow R^{(n)}(0) = \frac{(N-1)(N-2) \cdots [N-(n-1)]}{N^{n-1}} B^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} B^n$$

Por lo que, aplicando la fórmula de Taylor obtendremos:

$$R(\theta) = R(0) + \frac{R'(0)}{1!} \theta + \frac{R''(0)}{2!} \theta^2 + \cdots = I + \theta B + \theta^2 \frac{B^2}{2!} + \theta^3 \frac{B^3}{3!} + \cdots = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

Es decir: $R(\theta) = e^A = e^{\theta B} = e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$, en \mathbb{R}^2 . Es posible generalizar a n dimensiones.

Pero, ¿cómo puede ser esto de elevar un número a una matriz?. Vamos a recuperar el resultado obtenido por el método 1) de trigonometría:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I; \quad B^3 = -B; \quad B^4 = I; \quad B^5 = B; \quad B^6 = -I; \quad \dots$$

$$R(\theta) = I + \theta B + \theta^2 \frac{B^2}{2!} + \theta^3 \frac{B^3}{3!} + \cdots = I + \theta B - \frac{1}{2!} \theta^2 I - \frac{1}{3!} \theta^3 B + \frac{1}{4!} \theta^4 I + \frac{1}{5!} \theta^5 B + \cdots$$

Agrupando en I y en B y recordando el desarrollo en serie de Taylor de las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \cdots; \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots, \text{ tenemos:}$$

$$R(\theta) = I - \frac{1}{2!} \theta^2 I + \frac{1}{4!} \theta^4 I + \cdots + \theta B - \frac{1}{3!} \theta^3 B + \frac{1}{5!} \theta^5 B + \cdots = \cos \theta \cdot I + \sin \theta \cdot B$$

$$R(\theta) = \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{¡TACHÁN!}$$

A la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se le llama **GENERADOR de la ROTACIÓN** y dará lugar al **ÁLGEBRA de LIE**.

VÍDEO 3/17. EL GRUPO DE LORENTZ.

En el vídeo anterior: Rotación en \mathbb{R}^2 , $R(\theta) = \exp \left[\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$. La magnitud invariante es $x^T x = (x')^T x'$.

A lo largo de los vídeos veremos los grupos $SO(3)$, $SU(2)$, $SU(3)$, y también el grupo de Lorentz (relatividad).

Nos preguntamos, ¿que ocurriría si cambiásemos la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nuestra transformación será

ahora: $\Lambda(\omega) = \exp \left[\omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$, pero no sabemos cual será la magnitud invariante ????

Avanzamos que esta magnitud invariante tendrá que ver con la relatividad especial de Einstein. Introduciremos el concepto de métrica, relacionado con el espacio dual (y los matemáticos tendrán que seguir perdonándonos).

Vamos a trabajar con la transformación $\Lambda(\omega)$, que actuará sobre elementos de \mathbb{R}^2 . En lugar de llamar a estos elementos x_1, x_2 les vamos a llamar x^0, x^1 (las razones se verán evidentes pronto). $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\omega) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$

$$\Lambda(\omega) = \exp \left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = I + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{\omega^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 + \dots$$

$$\text{Como: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = I \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{por lo que:}$$

$$\Lambda(\omega) = \left(1 + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \dots \right) I + \left(\omega + \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} + \dots \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E identificando los paréntesis con desarrollos conocidos de Taylor, tenemos que: $\Lambda(\omega) = \cosh(\omega) I + \sinh(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Recordemos que las funciones hiperbólicas están definidas como $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y que se cumple la relación (es muy fácil de comprobar): $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. En adelante simplificaremos la forma de escribir \sinh y \cosh por sh y ch .

$$\Lambda(\omega) = ch(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + sh(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\omega & sh\omega \\ sh\omega & ch\omega \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\omega & sh\omega \\ sh\omega & ch\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Veamos qué es lo que queda invariante:

$$\begin{cases} (x')^0 = ch\omega x^0 + sh\omega x^1 \\ (x')^1 = sh\omega x^0 + ch\omega x^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x'^0)^2 = ch^2\omega (x^0)^2 + sh^2\omega (x^1)^2 + 2ch\omega sh\omega x^0 x^1 \\ (x'^1)^2 = sh^2\omega (x^0)^2 + ch^2\omega (x^1)^2 + 2ch\omega sh\omega x^0 x^1 \end{cases}$$

Restando ahora ambas expresiones: $(x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$, que es la magnitud conservada asociada a la transformación $\Lambda(\omega)$.

Si usamos la nomenclatura usual de la relatividad especial: $x^0 = ct$; $x^1 = x$, tenemos que $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$, que es el invariante bajo transformaciones de Lorentz. Como no se trata de una rotación, a este generador $\Lambda(\omega) = \exp \left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ se le llama **BOOST**. Nótese que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz **SIMÉTRICA**.

Vamos ahora a introducir los conceptos de métrica y espacio dual para generalizar las magnitudes invariantes.

En rotaciones, $(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2$; ahora. $(x^0 \ x^1) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = (x^0)^2 + (x^1)^2$, que no es lo que deseamos. Forma de solucionarlo, introduciendo una métrica: $(x^0 \ x^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = (x^0)^2 - (x^1)^2$. A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ se le llama métrica (se la representa por g en relatividad general y por η en relatividad especial). Para rotaciones la métrica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, por lo que no suele ponerse.

Formalmente, en matemáticas, la métrica está asociada al producto escalar y ha de cumplir que debe tratarse de una matriz **SIMÉTRICA** (esto es un requerimiento físico).

Vamos ahora el concepto de espacio dual.

Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es un vector bajo rotaciones significa que el vector transformado (rotado) ha de ser $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Si tenemos que $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix}$ es un vector en el espacio-tiempo, un vector de Lorentz, ha de ocurrir que $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$. Cuando nos hablan de vectores necesitamos saber si lo es bajo rotaciones, bajo transformaciones de Lorentz, o bajo transformaciones unitarias.

Consideremos un vector de Lorentz con la métrica η : $(x^0 \ x^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$. Definimos "vector dual = $\eta \cdot$ vector",

$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \rightarrow \eta \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \end{pmatrix}$. Para distinguir entre vector y vector dual lo que se hace es:

$\begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, cambiar superíndices del vector por subíndices en el vector-dual, sin el signo menos: $x^0 = x_0$, pero

$x^1 = -x_1$. Nota importante: el rigor irá apareciendo a medida que avancen los vídeos.

$$x^0x^0 - x^1x^1 = x_0x_0 + x_1x^1 = x^0x_0 + x^1x_1$$

De momento, podemos considerar esto como mera nomenclatura, pero muy potente (los matemáticos continuarán perdonándonos). Usando el convenio de Einstein tendremos: $x^i x_i$. Es muy importante diferenciar entre los índices espaciales y los temporales. Para los espaciales x^1, x^2, x^3 se suelen usar letras del alfabeto latino i, j, k ; cuando consideramos vectores el espacio-tiempo x^0, x^1, x^2, x^3 usaremos subíndices del alfabeto griego α, β, γ . Hablaremos entonces de $x^\mu x_\mu$.

Recopilando: $\Lambda(\omega) = \exp \left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ BOOST \rightarrow magnitud invariante Lorentz $x^\mu x_\mu$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para rotaciones, componentes espaciales, su invariante es:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 = -x_1 x^1 - x_2 x^2 - x_3 x^3$$

Si solo trabajamos con componentes espaciales no es necesario distinguir, podemos tomar la métrica como I

Lo relevante, en cuanto a la métrica, es que hay una distinción en cuanto a componentes temporales y espaciales.

VÍDEO 4/17. EL GRUPO $SO(3)$, GENERADORES.

Una rotación en \mathbb{R}^2 , en el plano XY , será $R_z(\theta) = \exp \left[\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$; $R = e^A$; $RR^T = I \wedge |R| = 1 \iff A + A^T = 0$

Una rotación **PASIVA** de ángulo θ en torno al eje z se generaliza en \mathbb{R}^3 como: $R_z(\theta) = \exp \left[\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

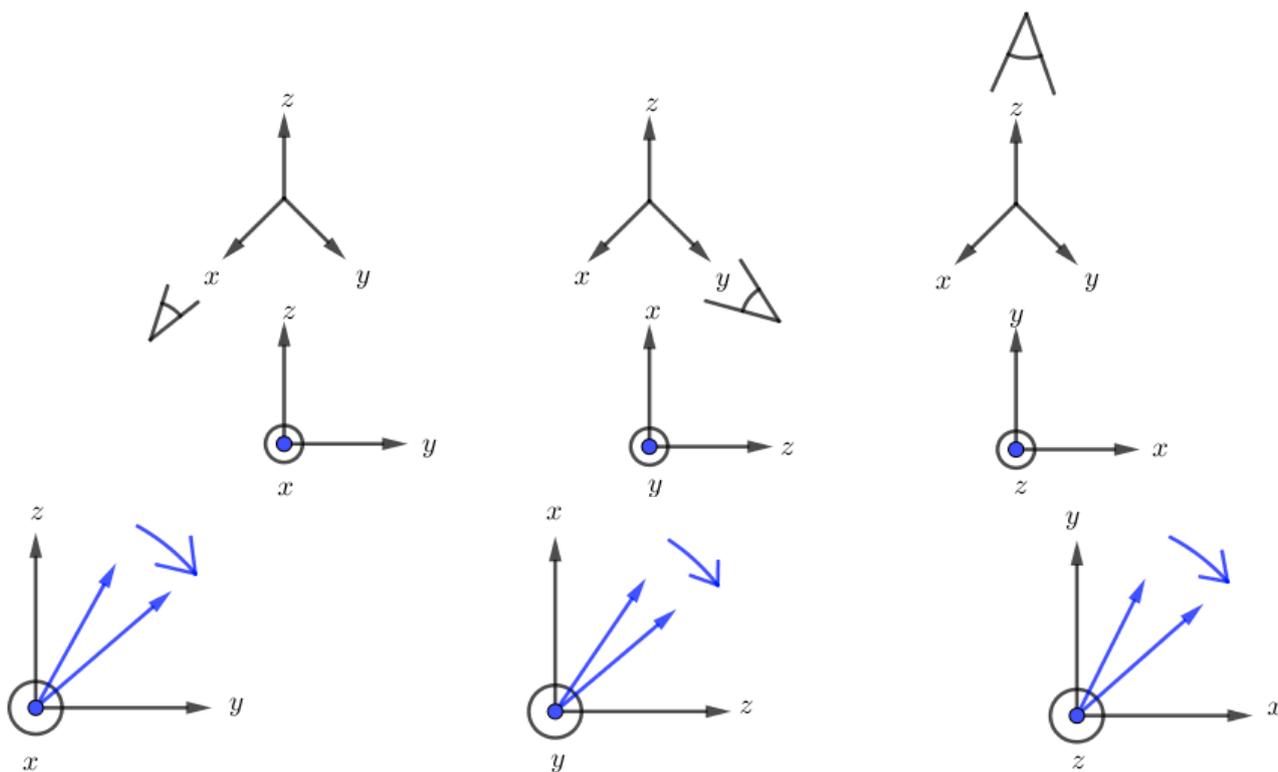
Recordemos como actúa una rotación infinitesimal:

$$R_z(\varepsilon) \simeq I + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow R_z(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \varepsilon y \\ y - \varepsilon x \\ z \end{pmatrix}$$

Como se trata de una rotación infinitesimal entorno al eje z , obviamente z no varía y x e y lo hacen infinitesimalmente.

A la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G_z$, que es **ANTISIMÉTRICA**, se le llama generador alrededor del eje z .

Fijémonos en la siguiente figura para deducir como serán G_x y G_y . (Recordar el truco del sistema de referencia orientado, el orden es xyz, xzy, \dots).



$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + \varepsilon x \\ z' &= z - \varepsilon y \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= x - \varepsilon y \\ y' &= y \\ z' &= z + \varepsilon x \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon y \\ y' &= y - \varepsilon x \\ z' &= z \end{aligned}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------

Los generadores de las rotaciones espaciales $SO(3)$ son:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para una rotación cualquiera: $R = e^A$, con A Antisimétrica y $|A| = 1$. $A_{3 \times 3} / A^T = -A \rightarrow a_{ii} = 0; a_{ij} = -a_{ji}$. Por ello A

ha de tener la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}$, es decir, solo tiene tres grados de libertad, 3 generadores.

Una rotación $R(\theta) = \exp[\theta \cdot B]$, entorno a un eje arbitrario. Como B ha de ser antisimétrica, ha de tener la forma:

$B = n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z$, Así, $R(\theta) = \exp[\theta \cdot (n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z)]$. ¿Quiénes son estos n_x, n_y, n_z ?

Cambiamos momentáneamente de notación: $R(\alpha) = \exp[\alpha B] = \exp[\alpha \cdot (n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z)]$

Supongamos una rotación infinitesimal: $R(\epsilon) = I + \epsilon \cdot (n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z) = I + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}$

$$R(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + n_z y - n_y z \\ y - n_z x + n_x z \\ z + n_y x - n_x y \end{pmatrix}$$

Si recordamos que el producto vectorial es ANTISIMÉTRICO, podemos observar que $\begin{matrix} n_z y - n_y z \\ -n_z x + n_x z \\ n_y x - n_x y \end{matrix}$ no son más que las

componentes del producto vectorial $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = \vec{x} \times \vec{n}$, luego: $R(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x} + \epsilon \cdot (\vec{x} \times \vec{n})$.

Si hubiésemos hecho una rotación infinitesimal entorno al eje x hubiéramos obtenido:

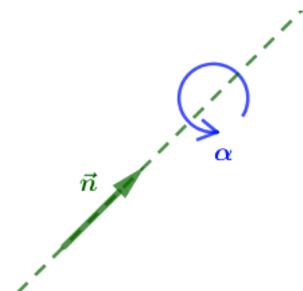
$$R_x(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x} + \epsilon \cdot (\vec{x} \times \vec{n}); \quad \vec{n} = (n_x, 0, 0); \quad R_x(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ n_x z \\ -n_x z \end{pmatrix}, \text{ al desarrollar } (x, y, z) \times (n_x, 0, 0)$$

Si tenemos $R_x(\epsilon) \simeq \vec{x} + \epsilon \cdot G_x$, nos dice que \vec{n} es un vector que apunta en la dirección \vec{x} .

Análogamente podríamos hablar de rotaciones entorno al eje y , $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$; y entorno al eje

z , $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_z \end{pmatrix}$. La interpretación es clara, una rotación entorno a un eje aleatorio en la

dirección de un vector \vec{n} es pues: $R_{\vec{n}}(\epsilon)$.



Hay una restricción respecto del módulo del vector \vec{n} , como $R_x(\epsilon) \simeq I + \epsilon \cdot n_x(0, z - y)$, ha de ocurrir que $\epsilon \cdot n_x = \epsilon$, por lo que $n_x = 1$. Generalizando, \vec{n} ha de ser unitario, $|\vec{n}| = 1$. Para recalcar que \vec{n} es unitario, escribiremos \hat{n} .

$$R(\alpha) = \exp[\alpha \hat{n} \cdot G] = \exp[\alpha \cdot (n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z)]; \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}; \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix}$$

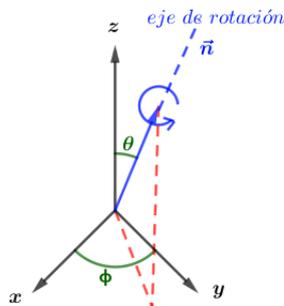
$$R(\alpha) = \exp[\alpha \hat{n} \cdot G] = I + \alpha \hat{n} \cdot \vec{G} + \frac{(\alpha \hat{n} \cdot \vec{G})^2}{2!} + \dots$$

Es tedioso, pero se puede demostrar (por un camino más corto que desarrollando por Taylor) que:

$$R(\alpha) \vec{x} = (1 - \cos \alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n}) \hat{n} + \cos \alpha \vec{x} - \sin \alpha (\hat{n} \times \vec{x})$$

$$R(\alpha) \vec{x} = (1 - \cos \alpha)(x n_x + y n_y + z n_z) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \cos \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \sin \alpha \begin{pmatrix} n_y z - n_z y \\ n_z x - n_x z \\ n_x y - n_y x \end{pmatrix}$$

$$R(\alpha) \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 - \cos \alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n}) n_x + \cos \alpha x - n_y \sin \alpha z + n_z \sin \alpha y \\ (1 - \cos \alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n}) n_y + \cos \alpha y - n_z \sin \alpha x + n_x \sin \alpha z \\ (1 - \cos \alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n}) n_z + \cos \alpha z - n_x \sin \alpha y + n_y \sin \alpha x \end{pmatrix}$$



$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) n_x^2 & (1 - \cos \alpha) n_x n_y + n_z \sin \alpha & (1 - \cos \alpha) n_x n_z - n_y \sin \alpha \\ (1 - \cos \alpha) n_x n_y - n_z \sin \alpha & \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) n_y^2 & (1 - \cos \alpha) n_y n_z + n_x \sin \alpha \\ (1 - \cos \alpha) n_x n_z + n_y \sin \alpha & (1 - \cos \alpha) n_y n_z - n_x \sin \alpha & \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) n_z^2 \end{pmatrix}$$

Usando coordenadas esféricas:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Concluyendo: $SO(3) = \{R_{3 \times 3} / R^T R = I \wedge |R| = 1\}$. Tiene tres parámetros libres para elegir, n_x, n_y, n_z, α , pero hay una restricción $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$, así que solo quedan 3 parámetros libres. Otra forma de ver estos parámetros es: α y θ, ϕ (eje de rotación).

En $\mathbb{R}^4, SO(4)$, hay 6 parámetros (no coincide con el número de dimensiones del espacio). Se verá en próximos vídeos.

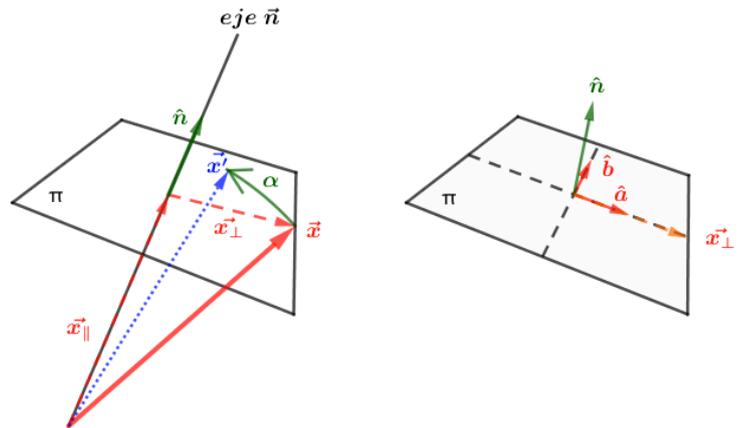
VÍDEO 5/17. Rotación de un vector \vec{x} entorno a un eje \hat{n} un cierto ángulo α (Fórmula de RODRIGUE'S).

Este vídeo se dedica a la demostración que quedo por hacer en el vídeo anterior (fórmula de rotación de Rodrigue's): rotación de un vector \vec{x} entorno a un eje \hat{n} un cierto ángulo α .

$$R(\alpha) \vec{x} = (1 - \cos\alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos\alpha\vec{x} - \sin\alpha(\hat{n} \times \vec{x})$$
 Esta es la fórmula que queremos demostrar.

Descomponemos \vec{x} como una componente paralela al eje de giro, \vec{x}_{\parallel} , y una perpendicular, \vec{x}_{\perp} :
 $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$

$\vec{x}'_{\parallel} = \vec{x}_{\parallel}$, la componente paralela al eje de giro no varía. La componente perpendicular, \vec{x}'_{\perp} sufre un giro en un plano perpendicular al eje de rotación (π), en el que establecemos una base ortonormal \hat{a}, \hat{b} .



La componente \vec{x}_{\parallel} es, obviamente, $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \hat{n}) \hat{n}$. Como $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$, despejando, $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{n}) \hat{n}$

En lo sucesivo, para referirnos al módulo de un vector usaremos la misma letra con la que designamos al vector pero sin flechita:
 $|\vec{a}| = a$. Para conseguir un vector unitario en la dirección de \vec{a} basta con dividirlo por su módulo, así: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$

En el plano de rotación π , tomamos $\hat{a} = \frac{\vec{x}_{\perp}}{x_{\perp}}$. Como \hat{n} es perpendicular a π formado por \hat{a} y \hat{b} , tenemos $\hat{b} = \hat{n} \times \hat{a}$ (también unitario al serlo \hat{n} y \hat{a} y ser ambos vectores ortogonales).

Al aplicar la rotación tendremos: $\vec{x}' = \vec{x}_{\parallel} + \dots \cdot \hat{a} + \dots \cdot \hat{b}$. Vamos a buscar esos coeficientes que multiplican a \hat{a} y \hat{b} .

$$\vec{x}' = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + \dots \cdot \hat{a} + \dots \cdot \hat{b}. \text{ Observando la figura del plano de rotación de más arriba, } \vec{x}'_{\perp} = x_{\perp} \cos\alpha \hat{a} + x_{\perp} \sin\alpha \hat{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + x_{\perp} \cos\alpha \hat{a} + x_{\perp} \sin\alpha \hat{b} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + x_{\perp} \cos\alpha \frac{\vec{x}_{\perp}}{x_{\perp}} + x_{\perp} \sin\alpha \cdot \hat{n} \times \hat{a} = \\ &= (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos\alpha \vec{x}_{\perp} + x_{\perp} \sin\alpha \cdot \hat{n} \times \frac{\vec{x}_{\perp}}{x_{\perp}} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos\alpha \vec{x}_{\perp} + \sin\alpha \cdot \hat{n} \times \vec{x}_{\perp} = \end{aligned}$$

Como: $\vec{x}_{\parallel} \parallel \hat{n} \rightarrow \vec{x}_{\parallel} \times \hat{n} = 0 \rightarrow \hat{n} \times \vec{x}_{\perp} = \hat{n} \times (\vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}) = \hat{n} \times \vec{x}$

$$\vec{x}' = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos\alpha(\vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}) + \sin\alpha \cdot \hat{n} \times \vec{x}$$

Agrupando: $\vec{x}' = \cos\alpha \vec{x} + (1 - \cos\alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + \sin\alpha(\hat{n} \times \vec{x})$

En todo momento hemos estado considerando rotaciones ACTIVAS, pero para los Grupos de Lie nos interesan las rotaciones PASIVAS, que sean los ejes y no el vector los que giren. Esto se consigue sin más que cambiar el ángulo α por $-\alpha$ y teniendo en cuenta la paridad de la función seno y coseno ($\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$), tenemos que:

$$\vec{x}' = \cos\alpha \vec{x} + (1 - \cos\alpha)(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - \sin\alpha(\hat{n} \times \vec{x}) \quad \text{q.e.d.}$$

Esta fórmula aparece con mucha frecuencia en mecánica cuántica.

VÍDEO 6/17. Las constantes de estructura del grupo $SO(3)$ coinciden con las componentes del tensor de Levi-Civita.

Grupo de rotaciones pasivas: $SO(3) = \left\{ R_{3 \times 3}, r_{ij} \in \mathbb{R} / R^T R = I \text{ Ortogonal} \wedge |R| = 1 \text{ Special} \right\}; |\hat{n}| = 1$
 eje entorno al cual se rota; θ ángulo rotado. $\vec{G} = \{G_1, G_2, G_3\}$ son los generadores de la rotación.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este vídeo veremos una introducción al ÁLGEBRA DE LIE.

$R_1 = e^A, R_2 = e^B$, como el grupo de rotaciones es no-abeliano, es evidente que $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$. Una forma de medir cuánto nos alejamos de la conmutabilidad es calcular el llamado CONMUTADOR de dos matrices (o de dos operadores) que se define como: $[R_1, R_2] = R_1 R_2 - R_2 R_1$

Quedándonos con la aproximación a primer grado, es decir, considerando rotaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned} R_1 &= I + A; \quad R_2 = I + B \\ R_1 R_2 &= (I + A)(I + B) = I + A + B + AB \\ R_2 R_1 &= (I + B)(I + A) = I + B + A + BA \\ R_1 R_2 - R_2 R_1 &= AB - BA = [A, B] \neq 0 \text{ ya que, en general, el producto de matrices no es conmutativo.} \end{aligned}$$

Como tanto A como B van a ser combinaciones lineales de los generadores de $SO(3)$, $[A, B]$ van a ser combinaciones de $[G_i, G_j]$.

Veamos una propiedades de los conmutadores:

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[B, A] \\ [A, B + C] &= [A, B] + [A, C] \\ [A + B, C + D] &= [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D] \\ [kA, B] &= k[A, B], \quad k \in \mathbb{R} \\ [kA, lB] &= kl[A, B]; \quad k, l \in \mathbb{R} \\ \text{El conmutador es antisimétrico: } [A, B]^T &= (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = [B, A] = -[A, B] \end{aligned}$$

Vamos con el conmutador de dos rotaciones:

$$[\theta_1(n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3), \theta_2(n'_1 G_1 + n'_2 G_2 + n'_3 G_3)] = \theta_1 \theta_2 (n_1 n'_1 [G_1, G_1] + n_1 n'_2 [G_1, G_2] + \dots) = \theta_1 \theta_2 \sum_{i,j=1}^3 n_i n'_j [G_i, G_j]$$

Como toda matriz antisimétrica se puede escribir como combinación lineal de los generadores G_1, G_2, G_3 y el conmutador $[G_i, G_j]$ también es antisimétrico, tendremos que, por ejemplo:

$$[G_1, G_1] = c_{121} G_1 + c_{122} G_2 + c_{123} G_3 = \sum_{j=1}^3 c_{12j} G_j = c_{12j} G_j \text{ (con la notación de Einstein).}$$

Generalizando: $[G_i, G_j] = c_{ijk} G_k$. Veamos quienes son estos c_{ijk} .

Es evidente que $[G_1, G_1] = [G_2, G_2] = [G_3, G_3] = 0$.

$$[G_1, G_2] = G_1 G_2 - G_2 G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -G_3$$

Obviamente, $[G_2, G_1] = -[G_1, G_2] = G_3$

Con la ayuda de cualquier sw de cálculo simbólico se puede comprobar que:

$$[G_1, G_3] = -[G_3, G_1] = G_2; \quad [G_2, G_3] = -[G_3, G_2] = G_1$$

Ahora vamos a introducir un pequeño truco con la ayuda de la unidad imaginaria "i":

$[G_1, G_2] = -G_3 = -1 \cdot G_3 = -i(-i)G_3 = -iJ_3$; donde hemos llamado. $J_3 = -i G_3$. Análogamente,
 $J_1 = -i G_1, J_2 = -i G_2$. Resulta obvio que $G_k = \frac{J_k}{-i}$. Recordar que $\frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = i$

Podemos comprobar que:

$$[J_1, J_2] = J_1 J_2 - J_2 J_1 = \frac{G_1}{-i} \frac{G_2}{-i} - \frac{G_2}{-i} \frac{G_1}{-i} = -G_1 G_2 + G_2 G_1 = [G_2, G_1] = G_3 = \frac{J_3}{-i} = i J_3$$

También ocurre que: $[J_1, J_2] = iJ_3; [J_2, J_3] = iJ_1; [J_3, J_1] = iJ_2$. Resultados que presentan un comportamiento cíclico: (123123123...)

Estamos ante una nueva forma de ver las rotaciones: $R(\hat{n}, \theta) = \exp [i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}]$ ($i\vec{J} \in \mathbb{R}$, tenemos matrices reales). Los generadores son ahora los. $J_k = -i G_k$:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta notación es necesaria en mecánica cuántica donde se trabaja con dos tipos de matrices:

- **Hermíticas** (o autoadjuntas), corresponden a las asociadas con observables (energía, cantidad de movimiento, momento angular, ...)
 - **Unitarias**, dan la evolución temporal o dinámica en mecánica cuántica, son responsables también de las simetrías.
- Una matriz es Hermítica si $(A^T)^* = A$, donde * es el símbolo de la conjugación en \mathbb{C} : $(2 + 3i)^* = 2 - 3i$. Por comodidad se suele usar el símbolo "daga", †, así: $(A^T)^* = A^\dagger = A$
- Una matriz es Unitaria si $U^\dagger \cdot U = I$

Los generadores G_k no son hermíticos, pero los J_k sí lo son. A los **coeficientes** c_{ijk} de los **conmutadores**, $[J_i, J_j] = i c_{ijk} G_k$, se les llama **CONSTANTES DE ESTRUCTURA**.

Como $[J_1, J_1] = 0 = i(c_{111}J_1 + c_{112}J_2 + c_{113}J_3) \rightarrow c_{111} = c_{112} = c_{113} = 0$ (pues no existe ninguna combinación lineal con coeficientes distintos de cero de los J_1, J_2, J_3 que de cero pues forman un sistema libre)

Como $[J_1, J_2] = iJ_3 = i(c_{121}J_1 + c_{122}J_2 + c_{123}J_3) \rightarrow c_{121} = c_{122} = 0 \quad \wedge \quad c_{123} = 1$

Se observa que $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$, donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita, es totalmente antisimétrico:

$$\epsilon_{123} = 1; \epsilon_{231}; \epsilon_{321} = 1; \epsilon_{213} = 0; \epsilon_{113} = 0.$$

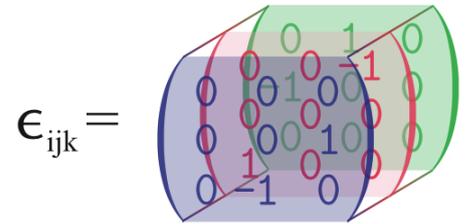
Conclusión: Las constantes de estructura del grupo $SO(3)$ coinciden con las componentes del tensor de Levi-Civita

Ampliación: ϵ_{ijk} es el tenor de Tullio Levi-Civita (italiano) o tensor de permutaciones (3-covariante)

$$\epsilon_{123} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ es } (1,2,3); (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es } (3,2,1); (1,3,2); (2,1,3) \\ 0 & \text{si } i = j \vee j = k \vee k = i \end{cases}$$

El producto vectorial se puede expresar en función del tensor de Levi-Civita así:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \right) \vec{e}_i$$



O más sencillamente, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, con $c_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k$, o usando la notación de Einstein, $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

VÍDEO 7/17. El grupo $SO(N)$.

Veamos ahora el grupo $SO(4)$, que nos permitirá generalizar al grupo $SO(N)$.

Vamos usar una nueva notación para los generadores G_i de los grupos $SO(n)$:

$SO(2)$ tiene un único generador: $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = G_{12}$, al que llamaremos G_{12} por tener en la posición 1,2 el número "1".

Análogamente, en $SO(3)$, a los generadores G_1, G_2, G_3 , les llamaremos ahora:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G_{12}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G_{31}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = G_{23}$$

Por ejemplo, la siguiente matriz admite dos nombres: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -G_{12} = G_{21}$

Usando la notación de J , tendremos: $J_{12} = -iG_{12} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y ahora, el subíndice ij hace

referencia al lugar que ocupa " $-i$ ". En $SO(3)$, tendremos que. $J_{12} = -iG_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sabemos que una rotación se expresa como $R = e^A / A^T = -A$. En $SO(4)$ las matrices antisimétricas 4x4 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & -f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Aparecen 6 matrices, una para cada uno de los 6 parámetros que necesita una matriz antisimétrica de orden 4.

Usando el criterio anterior para designar a estos 6 generadores de $SO(4)$, tendremos:

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \dots$$

En $SO(4)$, una rotación es $R = \exp[\theta \hat{n} \cdot \vec{G}]$, \hat{n} tendrá 6 componentes ya que hay 6 generadores \vec{G} , pero estamos en \mathbb{R}^4 , ¿es esto una contradicción?. No, lo que ocurre es que $SO(3)$ es muy peculiar y como solo hay tres ejes, girar alrededor de un eje es como un giro en un plano; pero en \mathbb{R}^4 hay 4 ejes y se pueden considerar hasta 6 planos (formados por dos ejes cualesquiera, de 6 ejes hay que elegir dos de ellos sin que importe el orden y sin poder repetirlos, tenemos pues combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ planos coordinados posibles sobre los que rotar).

$$SO(4) = \{R_{4 \times 4} / |R| = 1 \wedge R^T R = I\} \rightarrow R = \exp [a_{12}G_{12} + a_{13}G_{13} + a_{14}G_{14} + a_{23}G_{23} + a_{24}G_{24} + a_{34}G_{34}]$$

Donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, aunque aún no sabemos lo que significan y donde, p.e.: $G_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos un ejemplo en $SO(4)$: si hacemos $a_{12} = \epsilon$ infinitesimal,

$$R = \exp(a_{12}G_{12}) = \exp(\epsilon G_{12}) \simeq I + \epsilon G_{12} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \rightarrow R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \epsilon x_2 \\ x_2 - \epsilon x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Deducimos que para un determinado ángulo θ , $R_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La primera submatriz 3x3 representaría una rotación de ángulo θ sobre el eje z, pero estamos en 4 dimensiones, así que hay que interpretar esta rotación no entorno a un eje si no sobre un plano, rotación de ángulo θ sobre el plano de ejes 1y2. Ahora interpretamos los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ como el ángulo rotado en el plano ij . Recordar que en \mathbb{R}^4 hay 6 planos coordenados distintos sobre los que rotar.

Atención, $SO(4)$ no es como el grupo de Lorentz, la diferencia está en la métrica: para rotaciones tenemos $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ y en

relatividad se usa $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Calculemos las reglas de conmutación (se puede hacer uso de cualquier sw de cálculo simbólico)

$$[G_{12}, G_{13}] = G_{12}G_{13} - G_{13}G_{12} = G_{32}$$

Al fijarse en los subíndices sería de esperar que $[G_{34}, G_{31}] = G_{14}$, y ¡sí!

Veamos que ocurre con $[G_{23}, G_{12}] = [G_{23}, -G_{21}] = -[G_{23}, G_{21}] = -G_{13} = G_{31}$

También, $[G_{24}, G_{14}] = [-G_{42}, -G_{41}] = +[G_{42}, G_{41}] = G_{12}$

Haciendo uso del conocido delta de Kronecker : $\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$, podemos escribir:

$$[G_{ab}, G_{pq}] = G_{qb}\delta_{ab} + G_{bp}\delta_{aq} + G_{pa}\delta_{bq} + G_{aq}\delta_{bp}$$

Y, lo mejor de todo es que este resultado que se cumple para $SO(4)$ también se cumple para $SO(N)$.

¿Qué ocurre con los generadores J en vez de los G ?

$$(-i^2) [G_{ab}, G_{pq}] = [J_{ab}J_{pq} - J_{pq}J_{ab}] = -i \cdot (J_{qb}\delta_{ab} + J_{bp}\delta_{aq} + J_{pa}\delta_{bq} + J_{aq}\delta_{bp})$$

Como $-J_{ab} = J_{ba}$

Luego: $[J_{ab}, J_{pq}] = i \cdot (J_{bq}\delta_{ab} - J_{bp}\delta_{aq} + J_{ap}\delta_{bq} - J_{qa}\delta_{bp})$. Donde hemos cambiado índices para que sea más fácil de recordar y $a, b, p, q = 1, 2, \dots, N$

Estas son las constantes de estructura de $SO(N)$

El número de generadores de $SO(N)$ es $\frac{N(N-1)}{2}$

Veámoslo de tres modos distintos:

- * Como en N dimensiones hay $\binom{N}{2}$ planos sobre los que rotar, formas de tomar dos ejes de entre N a elegir, obviamente tendremos $\frac{N(N-1)}{2}$ generadores.
- * En toda matriz antisimétrica de orden N hay $N \times N$ elementos, con N de la diagonal principal son ceros y el resto son dobles ($a_{ij} = -a_{ji}$), así que nos quedan $\frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$
- * Los términos distintos de cero a un lado de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son la suma de una progresión aritmética: $1 + 2 + 3 + \dots + (N-1) = \frac{1 + (N-1)}{2} \cdot N = \frac{N(N-1)}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & = N-1 \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & \dots & \dots & = 3 \\ & & & 0 & \dots & = 2 \\ & & & & 0 & = 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \right)_{N \times N}$$

VÍDEO 8/17. El grupo $SU(2)$.

El grupo $SU(N)$. Fundamental en física teórica: $SU(2)$ es el responsable del spin y $SU(3)$ del color de las partículas elementales en QCD (cromodinámica cuántica)

Recordatorios:

$x \in \mathbb{C}$, p.e., $x = 2 + 3i$ su complejo conjugado es $x^* = 2 + 3(-i) = 2 - 3i$; si $x = ie^i$, $x^* = (-i)e^{-i}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} 2^* \\ (3+i)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix}; \quad A^T = (2 \quad 3+i); \quad A^\dagger = (A^T)^* = (2 \quad 3-i)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & -i \end{pmatrix} \rightarrow B^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & +i \end{pmatrix}$$

Producto escalar de vectores en \mathbb{C} : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow x \cdot y = x^\dagger y = (x_1^* \quad x_2^*) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2$

$$\text{Ejemplo: } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i \\ 3 \end{pmatrix} = (1 \quad -i) \begin{pmatrix} 2+i \\ 3 \end{pmatrix} = 2+i-3i = 2-2i$$

Se cumple que $x \cdot x = x^\dagger x = (x_1^* \quad x_2^*) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^* x_1 + x_2^* x_2 \in \mathbb{R}$, demostrémoslo:

$$(a+bi \quad c+di)(a+bi \quad c+di) = \begin{pmatrix} a-bi \\ c-di \end{pmatrix} (a+bi \quad c+di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}^+$$

El producto escalar, así definido, es definido positivo: $x \cdot x \geq 0$

Empecemos con $SU(2)$:

Estamos considerando vectores de \mathbb{C}^2 , $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, con $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Consideremos ahora la transformación U , que aplicada

sobre un vector x cumpla que: $(Ux) \cdot (Ux) = x \cdot x$ (Esto viene de un requerimiento de mecánica cuántica para que se conserve la probabilidad total). (En $SO(N)$ hacíamos $(Rx) \cdot (Rx) = x \cdot x$ para que permaneciese invariante bajo rotación la longitud del vector a rotar).

$$(Ux) \cdot (Ux) = x \cdot x \rightarrow (Ux)^\dagger \cdot Ux = x^\dagger U^\dagger Ux = x^\dagger x \leftrightarrow U^\dagger U = I. \text{ Condición para las transformaciones } U.$$

Si U depende de un parámetro real θ , $U(\theta)$, y queremos hacer una transformación infinitesimal $U(\epsilon)$ que obviamente cumpla que $U(0) = I$, sabemos que lo que tenemos que hacer es, en primera aproximación: $U(\epsilon) = I + \epsilon A$. Al exigir ahora que $U^\dagger U = I$, tenemos que: $(I + \epsilon A)^\dagger \cdot (I + \epsilon A) = I + \epsilon A^\dagger + \epsilon A + O(\epsilon^2) \simeq I + \epsilon A^\dagger + \epsilon A = I \rightarrow \epsilon(A + A^\dagger) = 0$, como $\epsilon \neq 0$, necesariamente $(A + A^\dagger) = 0 \rightarrow A^\dagger = -A$

Es decir: $U(\epsilon) = I + \epsilon A / A^\dagger = -A$

Como necesariamente los operadores en mecánica cuántica han de ser hermíticos o autoadjuntos ($M^\dagger = M$) ya que es sabido que si una matriz u operador es hermético, entonces es diagonalizable y tiene valores propios reales y la base de vectores propios es ortogonal.

Como $A^\dagger = -A$ no es hermítico, hagamos un truco: sea $A = aB$, donde B sí es hermítica, $B^\dagger = B$:

$A^\dagger = -A \rightarrow (z^\dagger = z^*) (aB)^\dagger = -(aB); a^*B^\dagger = -aB; B^\dagger = B \rightarrow a^* = -a \rightarrow Re(a) = 0 \rightarrow a = yi$, lo más sencillo $a = i$.

Expresamos $A = iB$, con B hermítico. Tenemos, pues, $U(\epsilon) = I + iB$, con B hermítico, $B^\dagger = B$. ¿Quién es esta B?

Ahora, para un θ no infinitesimal: $U(\theta) = e^{i\theta B}$

Podemos comprobar que $U^\dagger U = e^{-i\theta B} e^{i\theta B} = e^0 = I$. (¡Ojo! $e^M e^N = e^{M+N} \leftrightarrow [M, N] = 0$ y evidentemente $[B, B] = 0$)

Como estamos en \mathbb{C}^2 , B tendrá 2 valores propios λ_1, λ_2 y tendrá una base propia $\{b_1, b_2\}$. Al expresar B en la base propia será diagonal: $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

***** En el **apéndice I** se insertarán unas aclaraciones sobre **valores y vectores propios** extraídas del *video-curso de Javier García de "Mecánica Cuántica a lo Feynman, el capítulo 8*.

Recordemos que la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal principal y es independiente de la base en que esté expresada esa matriz.

$$U(\theta) = e^{i\theta \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

Como $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}} &= I + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 + \dots = \\ &= I + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nos interesa el valor del $\det(U(\theta))$, que es independiente de la base en que esté expresada la matriz.

$$U(\theta) = e^{i\theta \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta\lambda_2} \end{pmatrix} \rightarrow \det(U(\theta)) = e^{i\theta(\lambda_1+\lambda_2)} = e^{i\theta \text{Tr}(B)}, \text{ donde } \text{Tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ es la traza de } B.$$

Como $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \text{Tr}B \in \mathbb{R}; \theta \cdot \text{Tr}B \in \mathbb{R} \rightarrow \det(U(\theta)) = e^{i\theta \cdot \text{Tr}B} \in \mathbb{C}$. Si calculamos el módulo de este número complejo, $|z| = +\sqrt{z \cdot z^*}$, tenemos:

$$|\det(U(\theta))| = \left| e^{i\theta \text{Tr}B} \right| = + \sqrt{e^{i\theta \text{Tr}B} e^{-i\theta \text{Tr}B}} = + \sqrt{e^0} = 1$$

Pero deseamos ya no solo que sea 1 el $\det(U)$ al hacer el módulo sino que, sin necesidad de calcular el módulo del número complejo, el $\det(U)$ sea 1. Para ello $e^{i\theta \text{Tr}B} = e^0 = 1 \rightarrow \theta \cdot \text{Tr}B = 0$, luego necesitamos que $\text{Tr}B = 0$.

Recopilando, la transformación U ha de ser tal que: $U^\dagger U = I$, $\det U = 1 \rightarrow u(\theta) = e^{i\theta B}$, $B^\dagger = -B \wedge \text{Tr} B = 0$.

Ya podemos definir $SU(2)$, incluso $SU(N)$:

$$SU(N) = \{U / U^\dagger U = I \wedge \det U = 1\}, U_{2 \times 2} / u_{ij} \in \mathbb{C}$$

Que se puede parametrizar como:

$$SU(N) = \{U(\theta) = e^{i\theta B} / B^\dagger = -B \wedge \text{Tr} B = 0\}$$

Centrémonos ahora en $SU(2)$. ¿Cómo han de ser las matrices B ?

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$\rightarrow B^\dagger = B \rightarrow \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow a = a^*; d = d^* (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}) \wedge c^* = b (b^* = c) \rightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} a & x - iy \\ x + iy & b \end{pmatrix}; a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Cambiando de notación: } B = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & b \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Al exigir ahora que. $\text{Tr}(B) = 0 \rightarrow a + b = 0$

$$\text{Tendremos que: } B = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & -a \end{pmatrix}; a, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Podemos expresar } B = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & -a \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = c\sigma_x + d\sigma_y + a\sigma_z$$

Donde σ_x , σ_y , σ_z son las [matrices de PAULI](#)

$$\text{Truco: } B = a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot (n_1\sigma_x + n_2\sigma_y + n_3\sigma_z)$$

$$\text{Con } n_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; i = 1, 2, 3$$

$$\text{Luego: } \theta B = \theta \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot (n_1\sigma_x + n_2\sigma_y + n_3\sigma_z) = \Theta \cdot (n_1\sigma_x + n_2\sigma_y + n_3\sigma_z) = \Theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\text{Con } \Theta = \theta \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z); \hat{n} = (n_1, n_2, n_3) \quad (|\hat{n}| = 1)$$

Conclusión: $SU(2) = \left\{ U(\theta) = e^{i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} \right\}$ es la parametrización de $SU(2)$. Aún no le hemos dado sentido a las matrices $\vec{\sigma}$, ni a \hat{n} ni a θ . En próximos vídeos.

VÍDEO 9/17. El grupo $SU(3)$.

$$SU(3) = \left\{ U = e^{i\theta B} / \theta \in \mathbb{R}, \quad B^\dagger = B, \quad \text{Tr} B = 0; \quad B_{3 \times 3} / B_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

En el vídeo anterior, $SU(2)$, vimos que las matrices B tenían que ser de la forma $B = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$ y B se expresaba en función de los generadores de $SU(2)$ que eran las tres matrices de PAULI $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Ahora, en $SU(3)$, las matrices $B_{3 \times 3}$ han de ser hermiticas $B^\dagger = B$ y también han de cumplir que $\text{Tr} B = 0$. Generalizando a partir de la parametrización de $SU(2)$ como lo hizo GELL-MANN, podemos escribir:

$$B = \begin{pmatrix} a_3 + a_8 & a_1 - ia_2 & a_4 - ia_5 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 + a_8 & a_6 - ia_7 \\ a_4 + ia_5 & a_6 + ia_7 & -2a_8 \end{pmatrix}, \text{ con lo que } B \text{ será hermitica y de traza nula.}$$

En $SU(2)$, las matrices de Pauli tienen muchas propiedades que iremos viendo a medida que las necesitemos. Una de ellas dice que $\text{Tr}(\sigma_i, \sigma_j) = 2\delta_{ij}$.

Se pede comprobar que

$$\text{Tr}(\sigma_1, \sigma_1) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = 2\delta_{11} \text{ y que } \text{Tr}(\sigma_1, \sigma_2) = 0; \quad \text{Tr}(\sigma_1, \sigma_3) = 0; \quad \dots$$

Gell-Mann se inspiró en estos resultados y obtuvo, para $SU(3)$, las matrices de Gell-Mann siguientes λ_i ; $i = 1, \dots, 8$

$$B = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_7 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + a_8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Estas matrices no cumplen $\text{Tr}(\lambda_i, \lambda_j) = 2\delta_{ij}$. Para arreglarlo (se puede comprobar, basta con hacer uso de cualquier sw. De cálculo simbólico), basta con hacer:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 & 0 \\ i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \\ 0 & i/2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Que son las matrices de Gell-Mann o generadores de $SU(3)$. Con estas matrices nos aseguramos que $B^\dagger = B$, que $\text{Tr} B = 0$ y además que $\text{Tr}(\lambda_i, \lambda_j) = 2\delta_{ij}$. El grupo $SU(3)$ está relacionado con la QCD (cronodinámica cuántica).

Nos preguntamos ahora por los conmutadores $[\lambda_i, \lambda_j]$. Se puede demostrar que $[\lambda_i, \lambda_j] = i \sum_{k=1}^8 f^{ijk} \lambda_k = i f^{ijk} \lambda_k$, usando el convenio de Einstein.

De momento no vamos a hacer mucho caso de que los f^{ijk} tengan los subíndices arriba o abajo, lo consideraremos cosa de notación (momentáneamente). Las f_{ijk} son las CONSTANTES DE ESTRUCTURA DEL GRUPO, que lo definen perfectamente. Las reglas de conmutación de los generadores determinan la estructura del grupo.

Los f_{ijk} son totalmente antisimétricos, es decir $f_{123} = 1 \rightarrow f_{321} = -1 \rightarrow f_{231} = 1$.

Se tiene que: $f_{123} = 1$; $f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = 1/2$; $f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$; el resto de f_{ijk} son 0.

Aplicando la regla de conmutadores,

$$[\lambda_4, \lambda_5] = i f_{45k} \lambda_k = i \frac{1}{2} \lambda_3 + i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_8; \quad (f_{458} = \sqrt{3}/2; \quad f_{453} = -f_{543} = +f_{345} = 1/2)$$

VÍDEO 10/17. "ENTENDIENDO EL SPIN SIN MORIR EN EL INTENTO (1/3)"

En QM (mecánica cuántica) el spin es un momento angular, un vector bajo rotaciones.

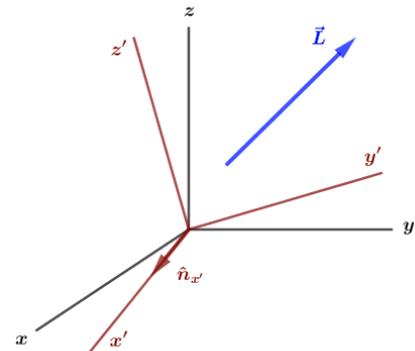
En física clásica, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Tiene la peculiaridad de que, en determinadas condiciones, $\vec{L} = cte$, el vector momento angular es constante en el tiempo, lo cual simplifica mucho las ecuaciones. En general, $\vec{r}(t); \vec{p}(t) \rightarrow \vec{L}(t)$.

En una BON (base ortonormal) orientada ($\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$), tenemos que:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x) = (L_x, L_y, L_z)$$

$$L_z = (0,0,1) \cdot \vec{L} = xp_y - yp_x, \text{ análogamente para } L_y, \text{ y para } L_x$$

Supongamos un nuevo sistema rotado, x', y', z' , y queremos saber las componentes de \vec{L} en este nuevo sistema.



$$L_{x'} = \hat{n}_{x'} \cdot \vec{L} = (n_{x'_1}, n_{x'_2}, n_{x'_3}) \cdot (L_1, L_2, L_3) = n_{x'_1}(yp_z - zp_y) + n_{x'_2}(zp_x - xp_z) + n_{x'_3}(xp_y - yp_x)$$

Que, matricialmente, se puede escribir como: $L_{x'} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & n_{3x} & -n_{2x} \\ -n_{3x} & 0 & n_{1x} \\ n_{2x} & -n_{1x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

En cualquier dirección \hat{n} , no necesariamente en el eje x' , tendremos que:

$$\hat{n} \cdot \vec{L} = (x \ y \ z) \cdot \left[n_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$L_n = \hat{n} \cdot \vec{L} = (x \ y \ z) \cdot [n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3] \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Hay una relación entre el momento angular y las matrices generadoras del giro en $SO(3)$, luego hay una relación entre el momento angular y las rotaciones.

Notación: $\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow r^T = (x \ y \ z)$. En el ámbito de la física clásica: $\hat{n} \cdot \vec{L} = r^T (\hat{n} \cdot \vec{G}) p$

Veamos ahora que ocurre si consideramos que sobre una función de dos variables $f(x, y) = x^2 + y^2$, p.e., la sometemos a una

rotación: $R : \begin{cases} \tilde{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \tilde{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$ y sustituimos en f:

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 c^2 + y^2 s^2 + 2scxy + x^2 s^2 + y^2 c^2 - 2scxy = x^2 + y^2 = f(x, y)$$

Luego esta $f(x, y)$ es INVARIANTE bajo la rotación R.

Hagamos una transformación infinitesimal, en vez de rotar $R(\theta)$, rotaremos $R(\epsilon)$, con $\epsilon^2 = 0$. Recordando los desarrollos en serie de $\sin x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots$ y $\cos x = x - x^3/3! + \dots$, tendremos: $\cos \epsilon \simeq 1$; $\sin \epsilon \simeq \epsilon$ y con ello:

$$R(\epsilon) = \begin{cases} \tilde{x} = x + \epsilon y \\ \tilde{y} = -\epsilon x + y \end{cases} \quad \text{Ahora: } \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x + \epsilon y, y - \epsilon x)$$

Aplicando el desarrollo de Taylor, en primera aproximación, para funciones de dos variables:

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f(x, y) + \epsilon y \frac{\partial f}{\partial x} + (-\epsilon x) \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ tenemos que:}$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx x^2 + y^2 + \epsilon y 2x + (-\epsilon x) 2y = x^2 + y^2 + 2\epsilon(xy - yx) = x^2 + y^2 = f(x, y) \rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f(x, y), \text{ en una transformación infinitesimal.}$$

En matemáticas se demuestra que las transformaciones (rotaciones) en un grupo continuo y que si

$\theta = 0 \rightarrow \tilde{x} = x \quad \wedge \quad \tilde{y} = y$, vamos, en un grupo de Lie, si son invariantes en una transformación infinitesimal también lo son en transformaciones finitas.

Ahora vamos a rotar un vector, $R\vec{r}$, Al derivar respecto del tiempo: $\frac{d}{dt}(R(\theta) \cdot \vec{r}(t)) = R \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = R \cdot \vec{v}$ (ya que $\theta = cte$). Multiplicando ambos miembros por la masa: $m \frac{d}{dt}(R\vec{r}) = R\vec{p}$. Conclusión, si \vec{r} hora como $R\vec{r}$, también lo hará \vec{p} , de la misma manera, como $R\vec{p}$. Todos los vectores rotan del mismo modo, con el mismo ángulo y la misma matriz $R(\theta)$.

En física clásica tenemos el Lagrangiano, que depende de \vec{r} y \vec{p} , $\mathcal{L}(r, \dot{r})$, con $\dot{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$.

***** En el **apéndice II** se insertarán unas aclaraciones sobre el **Lagrangiano** extraídas del video-curso de Javier García de "Mecánica Cuántica a lo Feynman, los capítulos 2 y 3.

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z). \text{ A partir de Lagrangiano se pueden deducir las ecuaciones de Newton}$$

a través de las ecuaciones de EULER-LAGRANGE: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right)$. En componentes, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right); i = 1,2,3$.

Pero, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = p_i$ (en casos mas generales es el momento generalizado). La pregunta ahora es: ¿será invariante el lagrangiano \mathcal{L}

bajo una rotación R ? La respuesta es NO, pero, a veces, Sí. Cuando Sí sea INVARIANTE es cuando $\vec{L} = \overline{cte}(t)$, cuando se conserva el momento angular (es constante en el tiempo).

***** En el **apéndice III** veremos que estamos relacionando ROTACIÓN con MOMENTO ANGULAR, esto es una consecuencia del TEOREMA DE NOETHER y allí hablaremos del vídeo de Javier García "Grupos, Simetrías y el Teorema de Noether en Física Teórica".

Supongamos una rotación infinitesimal $R = e^{\theta \hat{n} \cdot \vec{G}} \rightarrow R = I + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G}; (\epsilon^2 = 0)$. Sabemos que forman un grupo de Lie lo cual implica que si \mathcal{L} es invariante bajo rotaciones infinitesimales lo será bajo rotaciones finitas.

$Rr = (I + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G})r = r + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r = \tilde{r}$. Como r y \dot{r} rotan del mismo modo (como hemos visto antes), $\mathcal{L}(r + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r, \dot{r} + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} \dot{r})$. Quedándonos con la aproximación en primer grado del polinomio de Taylor para dos variables:

$$\mathcal{L}(r + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r, \dot{r} + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} \dot{r}) = \mathcal{L}(r, \dot{r}) + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right)^T + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} \dot{r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right)$$

Aclaración: $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right)^T = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)$

Así, $\epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r$ es un vector y $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right)^T \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r$ será un número y tendremos todo correcto en nuestra función de dos variables. Recordar: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = p \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} p = \dot{p}$.

$$\tilde{\mathcal{L}} \approx \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right)^T \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r + p^T \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} \dot{r} = \mathcal{L} + \dot{p}^T \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} r + p^T \epsilon \hat{n} \cdot \vec{G} \dot{r} = \mathcal{L} + \epsilon [\dot{p}^T \hat{n} \cdot \vec{G} r + p^T \hat{n} \cdot \vec{G} \dot{r}]$$

Nótese que $\dot{p}^T \cdot r + p^T \cdot \dot{r}$ suena a la derivada del producto: $\frac{d}{dt}(p^T \cdot r)$, así:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \epsilon \frac{d}{dt} [p^T (\hat{n} \cdot \vec{G}) r], \text{ ya que } \hat{n} \cdot \vec{G} \text{ es una matriz independiente del tiempo.}$$

Se puede comprobar que: $\frac{d}{dt} \left((2t \ t^2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} \right) = (2 \ 2t) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} + (2t \ t^2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\hat{n} \cdot \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ es antisimétrica, } (\hat{n} \cdot \vec{G})^T = -\hat{n} \cdot \vec{G}, \text{ y además se cumple que si } A \text{ es una matriz}$$

antisimétrica, $a^T A b = -b^T A a$. Como p^T es un vector, $\hat{n} \cdot \vec{G}$ es una matriz y r es otro vector, $p^T \hat{n} \cdot \vec{G} r$ es un número, y el traspuesto de un número es él mismo, por lo que: $[p^T (\hat{n} \cdot \vec{G}) r]^T = r^T (\hat{n} \cdot \vec{G})^T (p^T)^T = -r^T (\hat{n} \cdot \vec{G}) p$

La transposición del producto de matrices cumple: $(M \cdot N)^T = N^T M^T$

$$\text{Luego: } \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \epsilon \frac{d}{dt} [r^T (\hat{n} \cdot \vec{G}) p] = \mathcal{L} - \epsilon \frac{d}{dt} (\hat{n} \cdot \vec{L})$$

Concluyendo: en física clásica tenemos un \mathcal{L} y hacemos una rotación infinitesimal que forma un grupo de Lie y vemos que

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \epsilon \frac{d}{dt} (\hat{n} \cdot \vec{L}). \text{ Si } \frac{d}{dt} (\hat{n} \cdot \vec{L}) = 0 \leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}.$$

Supongamos que por otros métodos hemos averiguado que $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Entonces, no hay más remedio que $\frac{d}{dt} (\hat{n} \cdot \vec{L}) = 0$ (pues $\epsilon \neq 0$), lo que implica que $\hat{n} \cdot \vec{L}$ es constante en el tiempo (teorema de Noether).

Si $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$, \mathcal{L} es invariante bajo rotaciones en $SO(3)$, entonces, la componente del momento angular en cualquier dirección \hat{n} , $\hat{n} \cdot \vec{L}$ es constante en el tiempo. Como \hat{n} no está determinado, \vec{L} es constante en el tiempo.

En QM (mecánica cuántica) se ve que es el momento angular el que genera las rotaciones.

VÍDEO 11/17. "ENTENDIENDO EL SPIN SIN MORIR EN EL INTENTO (2/3)"

En capítulos anteriores:

$$\hat{n} \cdot \vec{L} = r^T (\hat{n} \cdot \vec{G}) p \text{ y } R(\hat{n}, \theta) = e^{\theta \hat{n} \cdot \vec{G}}, \text{ siendo } \vec{G} \text{ la matriz de los generadores de las rotaciones en } SO(3).$$

En QM los observables han de ser operadores hermíticos o autoadjuntos, pero las matrices \vec{G} no lo son. Para ello usaremos las ya definidas $J_k = -iG_k$, que sí son hermíticas $J^\dagger = J$. Los generadores de las rotaciones son, ahora:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $J = -iG$; $J(-i) = G$; $iJ = G$, y tendremos:

$$R(\hat{n}, \theta) = e^{i\theta (\hat{n} \cdot \vec{J})} \quad \text{y} \quad \hat{n} \cdot \vec{L} = r^T (\hat{n} \cdot i\vec{J}) p$$

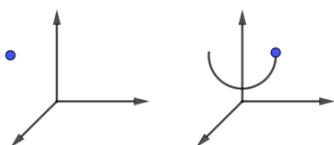
Los conmutadores de los generadores J_k son $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$, siendo ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. (recordar que $[J_1, J_2] = iJ_3$; $[J_2, J_3] = iJ_1$; $[J_3, J_1] = iJ_2$; $[J_k, J_l] = -[J_l, J_k]$; $[J_k, J_k] = 0$)

Veamos que ocurre si realizamos un giro de $+\pi/2$ (sentido positivo el levógiro o regla de la mano derecha) alrededor del eje z: evidentemente, el vector $(2,0,0)$ se debe convertir en el $(0,2,0)$:

$$R\left(\left(0,0,1\right), \frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}J_3} = 1 + i\frac{\pi}{2}J_3 + \frac{\left(i\frac{\pi}{2}J_3\right)^2}{2!} + \dots = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En nuestro ejemplo, } R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡Cuidado!, obtenemos justo el vector opuesto al que deberíamos haber obtenido, por tanto, hay que cambiar θ por $-\theta$ y tendremos que: $R(\hat{n}, \theta) = \exp[-i\theta(\hat{n} \cdot \vec{J})]$ para giros positivos (sentido dado por la mano derecha)



Supongamos ahora que tenemos una función.

$\psi(x, y, z) = \psi(\vec{r})$ ¿Qué significa "girar una función"?

$$\tilde{\psi}(r) = \psi(R^{-1} \cdot r)$$

Veamos un ejemplo aclaratorio:

Si $\psi(x, y, z) = 2x + 3y \rightarrow R((0,0,1), \pi/2) = e^{-i\frac{\pi}{2}J_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; por ser R una rotación $R^{-1} = R$, así:

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\psi}(r) = \psi(R^{-1}r) = \psi(y, -x, z) = 2(y) + 3(-x) = 2y - 3x$$

Siguiendo con nuestro ejemplo, un giro de $\pi/2$ sobre el eje z convertirías al punto $(1,1,0)$ en el $(-1,1,0)$, así $\psi(1,1,0) = 5$ y $\widetilde{\psi}(-1,1,0) = 2(1) - 3(-1) = 5$. ¡FUNCIONA!

Ahora vamos a calcular el GENERADOR DE UNA ROTACIÓN DE FUNCIONES. Como estamos en $SO(3)$, que es un Grupo de Lie, podemos hallar el generador de una rotación haciendo una rotación infinitesimal. (Al ser R ortogonal, $RR^T = I \rightarrow R^{-1} = R$; y $J^\dagger = J$)

$$R(\epsilon) = I - i\epsilon(\hat{n} \cdot \vec{G}), \text{ con } \epsilon^2 = 0$$

$$R^{-1}(\epsilon) = R^T(\epsilon) = I + i\epsilon(\hat{n} \cdot \vec{J})^\dagger = I + i\epsilon(\hat{n} \cdot \vec{J})$$

$$R^{-1} r = R + i\epsilon(\hat{n} \cdot \vec{J}) r$$

Tomando la primera aproximación de Taylor, $f(x + a) \approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} a$:

$$\widetilde{\psi} = \psi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^T i\epsilon(\hat{n} \cdot \vec{J}) r = \psi + i\epsilon [(-r^T(\hat{n} \cdot \vec{J})) \frac{\partial \psi}{\partial r}] = \psi - i\epsilon [(r^T(\hat{n} \cdot \vec{J})) \frac{\partial \psi}{\partial r}]$$

Hemos usado la propiedad vista en el tema anterior: $a^t A b = -b^t A a$.

$$\text{Saquemos } \psi \text{ factor común: } \widetilde{\psi} = [1 - i\epsilon r^T(\hat{n} \cdot \vec{J}) \frac{\partial}{\partial r}] \psi$$

$\frac{\partial}{\partial r}$ es un "operador", una acción que se efectúa sobre un objeto para obtener otro objeto de la misma especie

($\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$; $A \vec{v} = \vec{w}$; tanto $\frac{d}{dx}$ como A son operadores).

$\widetilde{\psi} = (1 + \boxtimes) \psi \rightarrow$ como estamos en un grupo de Lie, para una transformación finita tendremos: $\widetilde{\psi} = e^{\boxtimes} \psi$, así:

$$\widetilde{\psi}(r) = \exp[-i\theta r^T(\hat{n} \cdot \vec{J}) \frac{\partial}{\partial r}] \psi \quad (\text{Aclaración: } e^{\frac{\partial}{\partial r}} = 1 + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \dots)$$

***** En el **apéndice IV** veremos qué es el OPERADOR MOMENTO en QM, extraídas del video-curso de Javier García de "Mecánica Cuántica a lo Feynman, capítulo 31.

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv -i\hbar \vec{\nabla}, \text{ con } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \text{ operador gradiente. } \hbar \text{ es la constante de Plank reducida, es decir, } \frac{h}{2\pi}$$

Tenemos: $\widetilde{\psi}(r) = \exp[-i\theta r^T(\hat{n} \cdot \vec{J}) \vec{\nabla}] \psi(r)$; en QM $-i\hbar \vec{\nabla} = \vec{p}$, OPERADOR MOMENTO.

Ahora, $\frac{\vec{p}}{-i\hbar} = \vec{\nabla}$; $i\frac{\vec{p}}{\hbar} = \vec{\nabla}$, con lo que:

$$\widetilde{\psi}(r) = \exp[-i\theta r^T(\hat{n} \cdot \vec{J}) \frac{i\vec{p}}{\hbar}] \psi(r) = \exp[-i\frac{\theta}{\hbar} r^T(\hat{n} \cdot i\vec{J}) \vec{p}] \psi(r) = \exp[-i\frac{\theta}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{L}] \psi(r)$$

Teniendo en cuenta las primeras expresiones que hemos recordado al empezar este capítulo.

El OPERADOR que GENERA las ROTACIONES de las FUNCIONES en $SO(3)$ es: $\exp[-i\frac{\theta}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{L}]$. Tenemos conectado en momento angular \vec{L} con una rotación.

Hagamos una comprobación para ver que funciona:

$$\hat{n} = (1,0,0) \rightarrow \hat{n} \cdot \vec{L} = (1,0,0) \cdot (L_x, L_y, L_z) = L_x$$

$$r^T ((1,0,0) i (J_1, J_2, J_3)) \vec{p} = i \vec{r}^T \cdot J_1 \vec{p} =$$

$$= i (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = i (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 \\ -ip_z \\ ip_x \end{pmatrix} = i^2 (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 \\ -p_z \\ p_x \end{pmatrix} =$$

$$= -(-yp_z + zp_x) = yp_z - zp_x = L_x \ . \text{ Evidentemente, funciona.}$$

Calculemos $[x, p_x]$, con $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$; ($\vec{p} \equiv -i\hbar \vec{\nabla}$)

$$[x, p_x] = [x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}] = -i\hbar [x, \frac{\partial}{\partial x}]. \text{ Veamos como actúa sobre una función } \phi:$$

$$[x, p_x] \phi = -i\hbar [x, \frac{\partial}{\partial x}] \phi = -i\hbar (x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x) \phi =$$

$$= -i\hbar \{x\phi' - (x\phi)'\} = -i\hbar \{x\phi' - (1\phi + x\phi')\} =$$

$$-i\hbar(-1\phi) = i\hbar\phi \rightarrow [x, p_x] = i\hbar; \text{ análogamente: } [y, p_y] = i\hbar; [z, p_z] = i\hbar$$

Si hacemos $[x, p_y]$: $[x, p_y]\phi = -i\hbar \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} x \right\} \phi = -i\hbar \{x\phi'_y - (x\phi)'\} = -i\hbar \{x\phi'_y - x\phi'_y\} = 0$, donde

$$\phi'_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \text{ Concluyendo: } [r_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}; [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0$$

Veamos que vale el conmutador $[L_x, L_y]$. Recordar que \vec{L} es el generador de las rotaciones en el espacio de funciones (\vec{J} es el generador de rotaciones en el espacio de vectores)

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = (\text{por propiedades de conmutadores})$$

$$= [yp_z - zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] = (\rightarrow)$$

Como y conmuta con z y con p_x , puede salir del conmutador como "factor común por la izquierda":

$$[yp_z, zp_x] = yp_z zp_x - xp_z yp_z = yp_z zp_x - zp_y p_x p_z = yp_z zp_x - yz p_x p_z = y[p_z, zp_x]$$

Como p_x conmuta con p_z , puede salir "factor común por la derecha":

$$[yp_z, zp_x] = y[p_z, zp_x] = y(p_z zp_x - zp_x p_z) = y(p_z zp_x - zp_z p_x) = y(p_z z - zp_z)p_x = y[p_z, z]p_x = y(-i\hbar)p_x$$

Recordar que los conmutadores son antisimétricos. $[a, b] = -[b, a]$

Luego: $[L_x, L_y] = (\rightarrow) = y(-i\hbar)p_x - y(0)p_z - z(=)p_x + x(i\hbar)p_y = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$

Llega el momento de redefinir los \vec{J} para QM:

$$J_1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y tendremos que: $R(\hat{n}, \theta) = \exp(-i \frac{\theta}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{J})$

Y que: $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ y que: $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$

ATENCIÓN: ¿Ser un momento angular implica tener una vida dedicada a girar cosas?. Respuesta: ¡SÍ! ;-)

Momento angular sola hay uno, pero depende sobre qué actúe toma la forma $\vec{L}, \vec{J}, \vec{S}$; son las representaciones del momento angular.

En mecánica clásica $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. En QM existe un "concepto" llamado MOMENTO ANGULAR que:

→1) Si trabajamos con funciones $\psi(x, y, z)$, estamos en el espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$, lo que hace es $\exp(-i \frac{\theta}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{L})$, donde

$$\vec{L} = r^T (\hat{n} \cdot i\vec{J}) (-i\hbar \nabla)$$

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}); \quad L_z \psi = -i\hbar(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x}); \quad \exp(-i \frac{\theta}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{L})$$

rota ψ entorno a un eje \hat{n} un ángulo θ

→2) Si trabajamos en el espacio \mathbb{C}^3 , tendremos vectores $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, con $a_i \in \mathbb{C}$ y al rotar en este mundo el operador que se

encarga de ello es $R(\hat{n}, \theta) = \exp(-i \frac{\theta}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{J})$. Por ejemplo, para $\hat{n} = (0,0,1)$ este operador se transforma en

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso 1) tenemos un operador diferencial y en el caso 2) uno matricula, pero ambos lo que hacen es girar. En 1) lo que gira son funciones de modo que $\tilde{\psi} = \psi$ y en 2) lo que giran son vectores de modo que lo que permanece invariante es su módulo. El momento angular tiene distintas representaciones, no se representa igual en $L^2(\mathbb{R}^3)$ que en \mathbb{C}^3 .

¿Y en \mathbb{C}^2 , $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$? También se puede girar y ese giro es el SPIN 1/2 (el del electrón, el primero que se descubrió). El

SPIN 1/2 va a ser la "representación" del momento angular en \mathbb{C}^2 , el generador de las rotaciones en \mathbb{C}^2 .

VÍDEO 12/17. "ENTENDIENDO EL SPIN SIN MORIR EN EL INTENTO (3/3)"

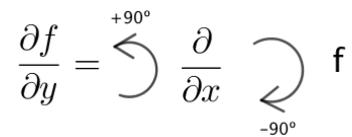
Si $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ cumple que $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$, entonces a \vec{J} se le llama MOMENTO ANGULAR y cumple que GENERA las ROTACIONES en el espacio donde "viva": $exp[-i\frac{\theta}{\hbar}\hat{n} \cdot \vec{J}]$

- * si lo que rotan son funciones ψ , el momento angular adecuado es \vec{L}
- * si lo que rotan son vectores de \mathbb{C}^3 , el momento angular son las matrices \vec{J}

¿Por qué decimos que \vec{J} es un vector bajo rotaciones?, ¿qué significa que un OPERADOR sea un VECTOR BAJO ROTACIONES? Vamos a responder a esta presunta con un ejemplo, vamos a rotar una "derivada" (superdivertido).

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)f; \quad \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \text{ es un vector!}$$

¿Qué hacemos si sabemos derivar respecto de "x", pero no respecto de "y"? Fácil: giramos -90°, derivamos respecto de "x" y volvemos a girar +90°: leyendo los símbolos de derecha a izquierda:



En el espacio de funciones, el generador de rotaciones es \vec{L} , como en nuestro ejemplo estamos rotando en el plano x y, el generador de la rotación será L_z , así, y según el esquema anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (e^{-i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z} \frac{\partial}{\partial x} e^{+i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z}) f \text{ o de modo más compacto: } \partial_y = (e^{-i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z} \partial_x e^{+i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z}) f$$

Comprobémoslo, multipliquemos ambos miembros por $-i\hbar$:

$$-i\hbar\partial_y = (e^{-i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z} (-i\hbar\partial_x) e^{+i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z}) f \rightarrow p_y = e^{-i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z} p_x e^{+i\frac{\pi/2}{\hbar}L_z}$$

Podemos escribir lo anterior con θ y tener luego en cuenta que $\theta = \pi/2$: $p_y = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} p_x e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z}$

Siempre que nos encontremos con expresiones del tipo $e^{-\theta A} B e^{\theta A}$, HADAMARD encontró una fórmula que simplifica MUCHO este tipo de cálculos. Veámosla.

Fijémonos que B y A no dependen de θ y llamemos $E(\theta) = e^{-\theta A} B e^{\theta A}$. Ahora, desarrollemos $E(\theta)$ en serie por Taylor:

$$E(\theta) = E(0) + \frac{E'(0)\theta}{1!} + \frac{E''(0)\theta^2}{2!} + \dots$$

$$E(0) = |B| = B$$

$$E'(\theta) = (-A e^{-\theta A} B e^{\theta A} + A) = (-A E(\theta) + E(\theta) A) = [E, A]$$

$$E''(\theta) = (-A E + E A)' = -A E' + E' A = [E', A] = [[E, A], A]$$

$$E'''(\theta) = (-A E' + E' A)' = -A E'' + E'' A = [E'', A] = [[[[E, A], A], A], A]$$

Sustituyendo θ por 0 y teniendo en cuenta que $E(0) = B$:

$$E'(0) = [B, A]; \quad E''(0) = \left[[B, A], A \right]; \quad E'''(0) = \left[\left[[B, A], A \right], A \right]; \quad \dots$$

Luego: $E(\theta) = B + [B, A] \theta + \frac{1}{2!} \left[[B, A], A \right] \theta^2 + \frac{1}{3!} \left[\left[[B, A], A \right], A \right] \theta^3 + \dots$ que es la FÓRMULA DE HADAMARD que, en muchas ocasiones, simplifica mucho los cálculos.

En nuestro caso, $p_y = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} p_x e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z}$, $\frac{i}{\hbar}L_z = A$ y $p_x = B$. Veamos los conmutadores:

$$[B, A] = \left[p_x, \frac{i}{\hbar}L_z \right] = \frac{i}{\hbar} [p_x, L_z] = \frac{i}{\hbar} [p_x, xp_y - yp_x] = \frac{i}{\hbar} \left([p_x, xp_y] - [p_x, yp_x] \right) = \frac{i}{\hbar} [x, p_x] p_y = \frac{i}{\hbar} (-i\hbar p_y) = p_y$$

Donde hemos tenido en cuenta que p_x conmuta con p_y y que $[p_x, p_y] = 0$. También p_x conmuta con y y con p_x da 0.

$$\left[[B, A], A \right] = \left[p_y, \frac{i}{\hbar}L_z \right] = \frac{i}{\hbar} [p_y, L_z] = \frac{i}{\hbar} [p_y, xp_y - yp_x] = \frac{i}{\hbar} \left(-[p_y, y] p_x \right) = \frac{i}{\hbar} (i\hbar) p_x = -p_x$$

$$\text{Con esto: } E(\theta) = p_x + \theta p_y + \frac{1}{2!} \theta^2 (-p_x) + \frac{1}{3!} \theta^3 (-p_y) + \frac{1}{4!} \theta^4 p_x + \dots$$

Teniendo en cuenta que $[B, A] = p_y$; $[p_y, A] = -p_x$ y así sucesivamente

Agrupando las potencias pares e impares aparecen los desarrollos en serie del $\sin\theta$ y del $\cos\theta$, pudiendo escribir:

$E(\theta) = p_x \cos\theta + p_y \sin\theta$. Y recordando que $\theta = \pi/2 \rightarrow E(\pi/2) = p_y$. ¡FASCINANTE! Y más aún sabiendo que esto

tiene que ver con la realidad. Hemos obtenido que $p_y = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} p_x e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = p_y$. Deshaciendo los cambios:

$p_y = -i\hbar\partial_y$; $p_x = -i\hbar\partial_x$ tenemos que:

$$\partial_y = e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}L_z} \partial_x e^{+i\frac{\pi}{2\hbar}L_z}. \text{ Luego sí se puede rotar una derivada.}$$

Se puede generalizar que: $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} p_y e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = -\sin\theta p_x + \cos\theta p_y$. \vec{p} son derivadas, $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, y se transforman igual que un vector, luego $\vec{\nabla}$ es UN VECTOR BAJO ROTACIONES.

En QM llamaremos MOMENTO ANGULAR a "algo" que se comporte como un vector bajo rotaciones y cuyas componentes conmuten como $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$.

Recapitulando: Sea \vec{A} un operador $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ (con A_i matrices o derivadas) que no cumpla las relaciones de conmutación anteriores, $[A_i, A_j] \neq i\epsilon_{ijk}A_k$; entonces \vec{A} no es un momento angular. ¿Pero podemos llamarle vector A ? Solo si cumple que al aplicarle una rotación de $SO(3)$, $R\vec{A}R^{-1}$ da lo que tiene que dar, es decir:

(x, y, z) es un vector si:

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} x e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z} &= x \cos\theta + y \sin\theta; \\ e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} y e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z} &= -x \sin\theta + y \cos\theta; \\ e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} z e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z} &= z \end{aligned}$$

Tanto con las derivadas como con \vec{r} funciona, son VECTORES BAJO ROTACIONES.

$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} L_x e^{+i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = L_x \cos\theta + L_y \sin\theta$; etc, etc. Luego $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ también es un VECTOR BAJO ROTACIONES y además es un MOMENTO ANGULAR, porque cumple las relaciones de conmutación de sus componentes $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$. En cambio, \vec{p} es un vector pero no un momento angular. Ya sabemos que es un vector bajo rotaciones y un momento angular en QM.

VÍDEO 13/17. "CÁLCULO DEL SPIN"

El SPIN, \vec{S} va a ser un VECTOR BAJO ROTACIONES $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ y un MOMENTO ANGULAR $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$

***** En QM, un sistema cuántico se describe mediante un espacio de Hilbert \mathbb{C}^4 formado por vectores de 4 componentes complejas. La notación que se usa es: $\vec{v} \rightarrow |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ y para su traspuesto conjugado:

$$\langle v^\dagger | = (v_1^* \quad v_2^* \quad v_3^* \quad v_4^*)$$

En el sistema cuántico habrá magnitudes que medir, observables, A, B, C ... que en QM han de ser operadores hermíticos, $A^\dagger = A$ y que en \mathbb{C}^4 tendrán 4 vectores propios $|v_i\rangle$, que formarán la base propia, y 4 valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$, de modo que $A |v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle$

Si tenemos un estado cuántico $|\psi\rangle$ descrito como $|\psi\rangle = a |v_1\rangle + b |v_2\rangle$, la probabilidad de que al medir A obtengamos el autovalor λ_3 es 0 y la probabilidad de que al medir A obtengamos el autovalor λ_2 será $|b|^2$.

Queremos medir el observable \vec{S} y sabemos que ha de ser 3 matrices (S_x, S_y, S_z) 4x4 complejas ya que estamos en \mathbb{C}^4 (en este capítulo los observables serán matrices, no derivadas). \vec{S} ha de comportarse como un vector bajo rotaciones y ha de ser un momento angular, esto es lo que nos permitirá encontrar esas matrices 4x4.

Nuestra MISIÓN es que al estar en un espacio de Hilbert de dimensión \mathbb{C}^N , hemos de encontrar tres matrices S_x, S_y, S_z de dimensión $N \times N$ y de números complejos que hagan que \vec{S} se comporte como un vector bajo rotaciones y que sea un momento angular. *****

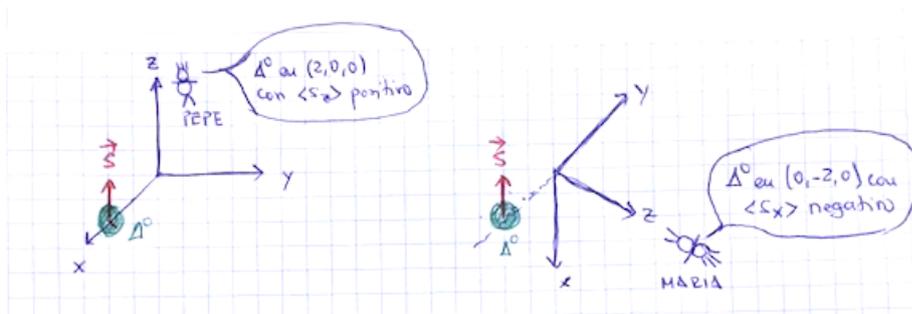
$\vec{S} \cdot \vec{S} = S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ (como el producto escala usual). El módulo de \vec{S} es $+\sqrt{S^2}$, que ha de ser INVARIANTE bajo rotaciones. S^2 es un ESCALAR (un número, invariante) bajo rotaciones.

***** Aclaremos esto de que S^2 es un ESCALAR bajo rotaciones. Tomemos, por ejemplo, un barión Δ^0 que tiene spin 3/2 y su espacio de Hilbert será $N = 4$ y \vec{S} 4 matrices 4x4 complejas.

La función $\phi(x, y, z)$ de la probabilidad de que Δ^0 esté en un determinado lugar y $|\psi\rangle$ especificará el estado de su spin. Usaremos la función $\phi(x, y, z) \otimes |\psi\rangle$.

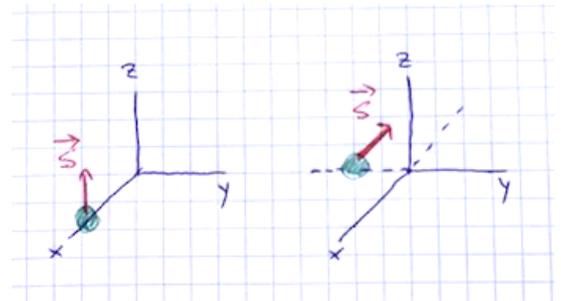
Pepe y María son dos observadores mirando al mismo Δ^0

Si nos imaginamos el cambio como ACTIVO (no rotan los ejes sino el barión), lo que ha ocurrido se muestra en otra imagen.



Primero se realiza una rotación en torno al eje z de -90° y luego otra rotación entorno al eje y de -90° .

Para rotar $\phi(x, y, z) \otimes |\psi\rangle$, el operador que se encarga de rotar ϕ es \vec{L} y el que se encargará de rotar ψ será \vec{S} .



Tendremos:

$$(e^{-i(-90)/\hbar L_y} \cdot e^{-i(-90)/\hbar L_z} \phi(x, y, z)) \otimes ((e^{-i(-90)/\hbar S_y} \cdot e^{-i(-90)/\hbar S_z} |\psi\rangle))$$

ROTAR implica que hay que usar el momento angular adecuado según en el mundo en que estés. Para girar funciones de onda usamos el operador \vec{L} , para girar funciones de spin hay que usar el operador \vec{S} (que aún no sabemos lo que es, pero es lo que intentamos descubrir).

S^2 es un escalar, invariante bajo rotaciones:

$e^{-i\theta/\hbar S_x} S^2 e^{-i\theta/\hbar S_x} = S^2$. Para que esto ocurra es necesario que (fórmula de Hadamard $e^{-BA} B e^{BA} = B + [B, A]s + \dots$) que $[S^2, S_x] = 0$ y también $[S^2, S_y] = 0$ y $[S^2, S_z] = 0$

Recapitulando: buscamos $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ en un espacio de Hilbert \mathbb{C}^N (matrices compleja de tipo $N \times N$) de modo que sea vector bajo rotaciones y momento angular.

Al ser S^2 ESCALAR bajo rotaciones, $[S, S_i] = 0$.

Hay que escoger una base de \mathbb{C}^4 y vamos a tomar la base propia de S_z (facilitará los cálculos). Los vectores y valores propios de S_z cumplirán: $S_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle$, con $m \in \mathbb{R}$ y $|m\rangle$ un vector de \mathbb{C}^N .

La base propia de S_z formada por los vectores propios $|m\rangle$, como S^2 y S_z conmutan, también será base propia de S^2 : $S^2 |m\rangle = \hbar c |m\rangle$ con $c \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$. Una de las tareas de este tema es encontrar los valores m y c .

Como S^2 conmuta con S_x, S_y, S_z , ha de ser proporcional a la Identidad. (Th: S^2 es un Casimir)

***** En QM, si $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ es una base ON y A un operador que, por ejemplo, actué sobre la base así: $A |v_1\rangle = 3 |v_1\rangle + 2 |v_2\rangle$; $A |v_2\rangle = 2 |v_1\rangle + |v_2\rangle$ y nos preguntamos que vale el producto escalar:

$$\langle v_1 | A | v_1 \rangle = 3 + 2 \langle v_1 | v_2 \rangle = 3 + 2 \cdot 0 = 3; \quad \langle v_1 | A | v_2 \rangle = 2; \quad \langle v_2 | A | v_1 \rangle = 2; \quad \langle v_2 | A | v_2 \rangle = 1$$

Lo que nos dice la QM es que podemos suponer que $|v_1\rangle$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que $|v_2\rangle$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y, entonces, la representación matricula de A será. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Comprobemos que funciona: $A |v_1\rangle = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 |v_1\rangle + 2 |v_2\rangle$ *****

En la base propia $|m\rangle$ de S_z y de S^2 , la representación matricial de S_z será, llamando M al máximo valor propio y m al mínimo:

$$S_z = \begin{pmatrix} \langle M | S_z | M \rangle & \dots & \langle M | S_z | m \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle m | S_z | M \rangle & \dots & \langle m | S_z | m \rangle \end{pmatrix}$$

Como, por ejemplo, $\langle 17 | S_z | 21 \rangle = \langle 17 | \hbar 18 | 21 \rangle = 18\hbar \langle 17 | 21 \rangle = 18\hbar \cdot 0 = 0 \rightarrow S_z$ será DIAGONAL, de hecho:

$$S_z = \begin{pmatrix} M\hbar & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & m\hbar \end{pmatrix}$$

En el caso en que $m = 1, 0, -1$, la representación matricial de S_z sería $S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la representación matricial de S^2

sería $S^2 = \hbar c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y aún no tenemos ni idea del valor de esta "c"

La pregunta ahora es ¿qué valdrá S_x y S_y ?

Por una parte, como $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$, podemos despejar $S_x^2 + S_y^2 = S^2 - S_z^2$ y tendremos que:

$$\langle m | S_x^2 + S_y^2 | m \rangle = \langle m | S^2 - S_z^2 | m \rangle = \hbar c - \hbar^2 m^2$$

Por otra parte: $(S_x + iS_y)(S_x - iS_y) = S_x^2 + S_y^2 - iS_xS_y + iS_yS_x = S_x^2 + S_y^2 + i[S_y, S_x]$. Como \vec{S} es un momento angular cumple las relaciones de conmutación y se tiene que $[S_y, S_x] = -i\hbar S_z$ y entonces $(S_x + iS_y)(S_x - iS_y) = S_x^2 + S_y^2 + \hbar S_z$. ¡Casi!

Teniendo en cuenta lo visto en los dos puntos anteriores, podemos escribir que: $(S_x + iS_y)(S_x - iS_y) = S^2 - S_z^2 + \hbar S_z$

Recapitulando una vez más: SPIN $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ en un espacio de Hilbert \mathbb{C}^N (matrices complejas de tipo $N \times N$) de modo que sea vector bajo rotaciones y momento angular.

Al ser S^2 ESCALAR bajo rotaciones, $[S, S_i] = 0 \rightarrow S^2 = \hbar c I; c \geq 0$

Escogemos com base de \mathbb{C}^4 la base propia de S_z y S^2 : $S_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle, S^2 |m\rangle = \hbar c |m\rangle$

Y ahora hemos visto que: $(S_x + iS_y)(S_x - iS_y) = S^2 - S_z^2 + \hbar S_z$

Si lo hacemos al revés: $(S_x - iS_y)(S_x + iS_y) = S^2 - S_z^2 - \hbar S_z$, pues aparece $[S_x, S_y] = +i\hbar S_z$

Tenemos:
$$\begin{cases} (S_x + iS_y)(S_x - iS_y) = S^2 - S_z^2 + \hbar S_z \\ (S_x - iS_y)(S_x + iS_y) = S^2 - S_z^2 - \hbar S_z \end{cases}$$

Llamemos: vector (malo, que baja) $|VADER\rangle = (S_x - iS_y)|m\rangle$ i vector (bueno, que sube) $|LEIA\rangle = (S_x + iS_y)|m\rangle$

Recordar que el módulo, distancia o norma de un vector es $|\vec{a}| = +\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, en notación de QM será: $\|\vec{a}\| = \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle$, donde $\langle m | = (|m\rangle)^\dagger$. Hay que recordar que las matrices S_i son hermíticas.

$$\| |VADER\rangle \| = \langle VADER | VADER \rangle = \langle m | (S_x + iS_y) | (S_x - iS_y) | m \rangle = \langle m | (S_x^2 - S_y^2 + \hbar S_z) | m \rangle = +\sqrt{\hbar^2 c - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m} = +\hbar\sqrt{c - m^2 + m}$$

Para LEIA tendríamos: $\| |LEIA\rangle \| = +\hbar\sqrt{c - m^2 - m}$

Calculemos ahora el conmutador $[S_z, S_x - iS_y] = [S_z, S_x] - i[S_z, S_y] = i\hbar S_y - i(-i\hbar S_x) = -\hbar(S_x - iS_y)$ y análogamente $[S_z, S_x + iS_y] = +\hbar(S_x + iS_y)$ (Por esto les hemos llamado VADER y LEIA por los signos - y +)

Vamos a por el último paso para averiguar S_x y S_y .

Llamemos $V = S_x - iS_y$ y $L = S_x + iS_y$

$$[S_z, V]|m\rangle = -\hbar V|m\rangle \rightarrow [S_z, V] = -\hbar V|m\rangle; \text{ no sabemos que vale } V|m\rangle \text{ pero sí lo que vale } S_z|m\rangle = \hbar|m\rangle$$

$$[S_z, V]|m\rangle = S_z V|m\rangle - V S_z|m\rangle = -\hbar V|m\rangle \rightarrow S_z V|m\rangle - V \hbar m|m\rangle = -\hbar V|m\rangle; \hbar m \text{ es un número,}$$

$$\rightarrow S_z V|m\rangle - \hbar m V|m\rangle = -\hbar V|m\rangle \rightarrow S_z V|m\rangle = \hbar m V|m\rangle - \hbar V|m\rangle; \text{ como } V|m\rangle = |VADER\rangle:$$

$$S_z |VADER\rangle = (\hbar m - \hbar) |VADER\rangle \rightarrow S_z |VADER\rangle = \hbar(m - 1) |VADER\rangle. \quad |VADER\rangle \text{ es propio de } S_z!$$

Y lo mismo para LEIA: $S_z |LEIA\rangle = \hbar(m + 1) |LEIA\rangle$ (VADER baja "-1" y LEIA sube "+1")

Nótese que $S_z | \dots \rangle = \hbar(m1) | \dots \rangle \rightarrow S_z |k(m - 1)\rangle = \hbar(m1) |k(m - 1)\rangle$, ya que

$$S_z |k(m - 1)\rangle = \hbar k(m1) |(m - 1)\rangle = \hbar(m1) |k(m - 1)\rangle$$

Luego: $|VADER\rangle \sim |m - 1\rangle \quad \wedge \quad |LEIA\rangle \sim |m + 1\rangle$

Como los vectores de la base están normalizados, las constantes de proporcionalidad han de valer, respectivamente, $+\hbar\sqrt{c - m^2 + m}$ y $+\hbar\sqrt{c - m^2 - m}$. Luego,

$$|VADER\rangle = \hbar\sqrt{c - m^2 + m} |m - 1\rangle \quad \wedge \quad |LEIA\rangle = \hbar\sqrt{c - m^2 - m} |m + 1\rangle. \text{ De ahí:}$$

$$\begin{cases} S_x |m\rangle - iS_y |m\rangle = \hbar\sqrt{c - m^2 + m} |m - 1\rangle \\ S_x |m\rangle + iS_y |m\rangle = \hbar\sqrt{c - m^2 - m} |m + 1\rangle \end{cases}$$

Sumando y restando estas dos ecuaciones, obtendremos los valores de S_x y S_y .

$$S_x |m\rangle = \hbar/2\sqrt{c - m^2 + m} |m - 1\rangle + \hbar/2\sqrt{c - m^2 - m} |m + 1\rangle$$

Teniendo en cuenta que $\langle m_1 | m_2 - 1 \rangle = \delta_{m_1, m_2 - 1}$. Por ello:

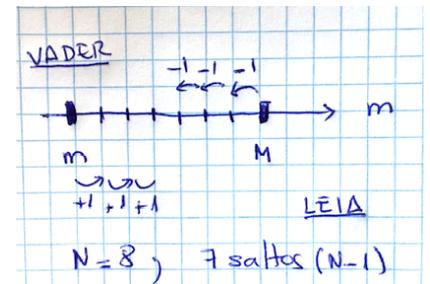
$$\langle m_1 | S_x | m_2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{c - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2 - 1} + \sqrt{c - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2 + 1} \right)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\hbar}{-2i} = i \frac{\hbar}{2}$, también se tiene que:

$$\langle m_1 | S_y | m_2 \rangle = i \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{c - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2 - 1} - \sqrt{c - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2 + 1} \right)$$

Pero si sobre VADER actúa así: $S_z(S_x - iS_y) |m\rangle = \hbar\sqrt{c - m^2 + m} |m - 1\rangle$, VADER baja una unidad. Pero, ¿cuántas puede bajar?. Como la dimensión del espacio es N y llamando M al máximo valor posible de m y m al mínimo de ellos, tenemos:

Se pueden dar $(N - 1)$ saltos para tomar los N (dimensión) valores o vectores propios de la base, para pasar de M a m (bajando una unidad cada vez, VADER) o de m a M (subiendo una unidad cada vez LEIA)



Como Vader va bajando y cuando llegue a m no puede bajar más, necesariamente el coeficiente $c - m^2 + m$ deberá ser cero: $c = m^2 - m$, siendo m el mínimo valor posible. Con Leia, cuando esté en la M máxima ya no podrá subir más y para ello, el coeficiente $c - M^2 - M$ ha de ser cero, con lo que $c = M^2 + M$. Deducimos que $m^2 - m = M^2 + M$, o bien que $0 = M^2 - m^2 + M + m$.

Teniendo en cuenta la relación entre m , M y N (la dimensión del espacio, para subir desde m hasta M hay $(N - 1)$ saltos: $M = m + (N - 1)$, o también $M - m = N - 1$.

Ahora: $0 = M^2 - m^2 + M + m = (M - m)(M + m) + (M + m) = (M + m)(M - m + 1) = (M + m) \cdot N$ y como $N \neq 0$, necesariamente ha de ocurrir que $M + m = 0$, es decir, $m = -M$. Los posibles valores de m van desde $-M$ hasta $+M$, sumando (restando) 1.

Es costumbre que en los textos científicos a m le llamen s , con $s \geq 0$ (ya que estamos tratando con \vec{S} , si tratásemos con \vec{L} le llaman l , si estamos con \vec{J} , j).

Así: $c = M^2 + m = s^2 + s = s(s + 1)$ y entonces $S^2 |m\rangle = \hbar s(s + 1) |m\rangle$

Antes vimos que $M - m = N - 1$, ahora $s - (-s) = 2s = N - 1 \rightarrow s = \frac{N - 1}{2}$, lo que encierra unas consecuencias muy profundas.

Siendo N la dimensión del espacio; $s = \frac{N - 1}{2}$ y los posibles valores de m son $m : s, s - 1, s - 2, \dots, -s$, tendremos las siguientes posibilidades:

$$N = 1 \rightarrow s = 0 \rightarrow m = 0$$

$$N = 2 \rightarrow s = 1/2 \rightarrow m = 1/2, -1/2$$

$$N = 3 \rightarrow s = 1 \rightarrow m = 1, 0, -1$$

$$N = 4 \rightarrow s = 3/2 \rightarrow m = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$$

“Dime que SPIN tienes y te diré la dimensión del espacio que necesitas”

Los posibles valores del SPIN son: $s : 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$

Finalmente tenemos:

SPIN espacio de Hilbert \mathbb{C}^N , dimensión N .

\vec{S} vector bajo rotaciones y momento angular.

$$N = 2s + 1; m : s, s - 1, \dots, -s$$

$$S_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle$$

$$S^2 |m\rangle = \hbar^2 s(s + 1) |m\rangle$$

$$\langle m_1 | S_x | m_2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{s(s + 1) - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2 - 1} + \sqrt{s(s + 1) - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2 + 1} \right)$$

$$\langle m_1 | S_y | m_2 \rangle = i \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{s(s + 1) - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2 - 1} - \sqrt{s(s + 1) - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2 + 1} \right)$$

Particularizando para $s = 1/2$, $m : 1/2, -1/2$; $N = 2$

$$s^2 = \hbar^2 1/2 (1/2 + 1) I = 3\hbar^2/4 I = \frac{3\hbar}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Para S_x y S_y , sus elementos los hemos encontrado teniendo en cuenta todas las posibilidades:

$s_{11} = \langle 1/2 | S_x | 1/2 \rangle$; $s_{12} = \langle 1/2 | S_x | -1/2 \rangle$; $s_{21} = \langle -1/2 | S_x | 1/2 \rangle$; $s_{22} = \langle -1/2 | S_x | -1/2 \rangle$ y los valores que toman delta de Dirac

Cuando vimos $SU(2) = \left\{ e^{i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} \right\}$, siendo $\vec{\sigma}$ las matrices de PAULI que ahora aparecen aquí:

$$s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z; s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x; s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y$$

SPIN 1/2 está relacionado con $SU(2)$

Normalmente, las partículas elementales tendrán SPIN 1/2, 1, 3/2 que estarán relacionados con $SU(2)$, $SU(3)$ y $SU(4)$ y tendremos que trabajar con matrices complejas 2x2, 3x3 o 4x4.

VÍDEO 14/17. "JUGANDO CON EL SPIN (1/2)"

Resumen del tema anterior

SPIN espacio de Hilbert \mathbb{C}^N , dimensión N .

\vec{S} vector bajo rotaciones y momento angular: $[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$

Base canónica $\mathbb{C}^N : \{|m\rangle\} : m : s, s-1, \dots, -s; N = 2s+1 \rightarrow s : 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

$$S_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle$$

$$S^2 |m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |m\rangle$$

$$\langle m_1 | S_x | m_2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{s(s+1) - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2-1} + \sqrt{s(s+1) - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2+1} \right)$$

$$\langle m_1 | S_y | m_2 \rangle = i \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{s(s+1) - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2-1} - \sqrt{s(s+1) - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2+1} \right)$$

$$\langle m_1 | S_z | m_2 \rangle = \hbar m_2 \delta_{m_1, m_2}$$

Vamos a jugar con el SPIN, como conectar todo esto con la realidad. Calculemos los tres primeros spin:

$$s = 1/2: \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = 1: \quad S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad S^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = 3/2: \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}; \quad S^2 = \frac{15\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vamos con } s = 1/2: \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

hagamos una especie de "hola mundo": tenemos una partícula de spin 1/2 que se puede describir mediante su función de onda ψ que contará de dos partes, una espacial que describirá $\phi(x, y, z)$ y otra de spin que quedará descrita por un vector complejo de dimensión 2 ($N = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$). Por ejemplo: $\psi = \phi(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$. Puesto que ahora solo nos vamos a ocupar de la

parte del spin, prescindiremos de la parte espacial ϕ y el estado de nuestra partícula será un vector: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$

$$\text{¿Qué significa esto?: } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 |1/2\rangle + i |-1/2\rangle$$

Para medir S_z sabemos como actúa sobre sus vectores propios: $S_z |1/2\rangle = \hbar \frac{1}{2} |1/2\rangle; \quad S_z |-1/2\rangle = \hbar \frac{-1}{2} |-1/2\rangle$, los

valores propios de S_z son $\pm \frac{\hbar}{2}$.

$|\psi\rangle = 3|1/2\rangle + i|-1/2\rangle \rightarrow |3|^2 = 9; |-i|^2 = 1$. Pero la probabilidad total ha de ser 1 \rightarrow Hay que NORMALIZAR el vector ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$).

Para ello, hagamos

$$|\psi\rangle = k \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = k^* (3 \quad -i) k \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = |k|^2 (9 + 1) = 10|k|^2 = 1 \rightarrow |k| = \frac{1}{\sqrt{10}} : k = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ es la llamada fase global que, al no ser medible, se puede omitir.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|1/2\rangle + i|-1/2\rangle) \rightarrow S_z = \begin{cases} \frac{\hbar}{2} & \text{con prob} \left| \frac{3}{\sqrt{10}} \right|^2 = 9/10 = 90\%; \uparrow \\ -\frac{\hbar}{2} & \text{con prob} \left| \frac{i}{\sqrt{10}} \right|^2 = 1/10 = 10\%; \downarrow \end{cases}$$

¿Cómo tendría que ser $|\psi\rangle$ para que $S_z = \hbar/2$ con probabilidad 1? Pues así: $|\psi\rangle = |1/2\rangle$

¿Y qué pasaría si midiésemos S_x en nuestro estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|1/2\rangle + i|-1/2\rangle)$?

No sabemos los vectores propios de S_x , busquémolos. ($|1/2\rangle; |-1/2\rangle$ son los vectores propios de S_z y de S^2 , pero no de S_x ni de S_y , que no conmutan con S_z)

$$S_x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b = \lambda a \\ a = \lambda b \end{cases} \rightarrow b = \lambda a = \lambda(\lambda b) = \lambda^2 b \rightarrow \lambda = \pm 1 : \text{val. propios de } S_x$$

Para $\lambda = 1, b = a$. El vector propio $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que normalizado se escribirá como: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Para $\lambda = -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Que son los vectores propios de S_x . Como $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y llamando $|x+\rangle$ y $|x-\rangle$ a:

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2\rangle + |-1/2\rangle), \text{ de valor propio } \hbar/2 \text{ y } |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2\rangle - |-1/2\rangle) \text{ de valor propio } -\hbar/2, \text{ vamos}$$

a medir S_x sobre nuestro estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|1/2\rangle + i|-1/2\rangle)$. Para ello usamos el siguiente truco:

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2\rangle + |-1/2\rangle) \rightarrow \text{sumando} : |1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (|x+\rangle + |x-\rangle)$$

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2\rangle - |-1/2\rangle) \rightarrow \text{restando} : |-1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (|x+\rangle - |x-\rangle)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}} (3|1/2\rangle + i|-1/2\rangle) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (|x+\rangle + |x-\rangle) + \frac{i}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (|x+\rangle - |x-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{20}} ((3+i)(|x+\rangle) + (3-i)|x-\rangle) \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } S_x = \begin{cases} \frac{\hbar}{2} & \text{con prob } \left| \frac{3+i}{\sqrt{20}} \right|^2 = (9+1)/20 = 50\%; \rightarrow \\ -\frac{\hbar}{2} & \text{con prob } \left| \frac{3-i}{\sqrt{20}} \right|^2 = (9+1)/20 = 50\%; \leftarrow \end{cases}$$

En general, $|\psi\rangle$ es una combinación lineal de vectores $\left\{ |1/2\rangle; |-1/2\rangle \right\}$ que miden S_z al 90% \uparrow y al 10% \downarrow y miden S_x al 50% \rightarrow y al 50% \leftarrow .

Las bases que tenemos son:

$$\text{Base } S_x: \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base } S_z \text{ y } S^2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base } S_y: \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

EJERCICIO:

Comprobemos que los vectores de la base de S_y son propios: $S_y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$,

efectivamente es un vector propio de S_y . Para el otro vector: $S_y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{-\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Si quisiéramos medir S_y para nuestro estado $|\psi\rangle$, como $B_{S_y} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} = \left\{ |y+\rangle, |y-\rangle \right\}$ es la base propia de S_y con valores propios $\pm \hbar/2$ respectivamente, veamos como escribir $\left\{ |1/2\rangle; |-1/2\rangle \right\}$ en esta base.

$$|y+\rangle + |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} (|y+\rangle + |y-\rangle)$$

$$|y+\rangle - |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{2i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow |-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i\sqrt{2}}{2} (|y+\rangle - |y-\rangle)$$

Ahora,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3 |1/2\rangle + i |-1/2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{\sqrt{2}}{2} (3 (|y+\rangle + |y-\rangle) + i(-i)(|y+\rangle - |y-\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{20}} (4 |y+\rangle + 2 |y-\rangle)$$

$$\text{Luego, } S_y = \begin{cases} \frac{\hbar}{2} & \text{con prob } \left| \frac{4}{\sqrt{20}} \right|^2 = 16/20 = 80\%; \rightarrow \\ -\frac{\hbar}{2} & \text{con prob } \left| \frac{2}{\sqrt{20}} \right|^2 = 4/20 = 20\%; \leftarrow \end{cases}$$

Veamos como construir el vector $\langle \vec{S} \rangle$, valor esperado del SPIN.

En nuestro ejemplo hemos visto que S_z da $\hbar/2$ en 9/10 de las veces y $-\hbar/2$ en 1/10 veces. Luego su valor esperado (medio)

$$\text{será: } \langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{9}{10} + \left(\frac{-\hbar}{2} \right) \frac{1}{10} = \frac{8\hbar}{20}$$

Matricialmente, el cálculo se realiza así:

$$\langle \psi | S_z | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3 \quad -i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{20}} (3 \quad -i) \begin{pmatrix} 3 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{20}} (9 - 1) = \frac{8\hbar}{\sqrt{20}}$$

$$\text{Para } \langle S_x \rangle : \langle \psi | S_x | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3 \quad -i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{20}} (3 \quad -i) \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{20}} (3i - 3i) = 0$$

Efectivamente, antes obtuvimos que S_x un 50% de las veces da $\hbar/2$ y otro 50% de las veces da $-\hbar/2$, por lo que en promedio $\langle S_x \rangle = 0.5(\hbar/2) + 0.5(-\hbar/2) = 0$.

$$\text{Del EJERCICIO anterior, } \langle S_y \rangle = 0.8 \frac{\hbar}{2} + 0.2 \left(\frac{-\hbar}{2} \right) = 0.6 \frac{\hbar}{2} = \frac{6\hbar}{20}$$

$$\text{Para } \langle S_y \rangle : \langle \psi | S_y | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3 \quad -i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{20}} (3 \quad -i) \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{20}} (3 + 3) = \frac{6\hbar}{\sqrt{20}}$$

$$\text{Tenemos: } \langle S_x \rangle = 0; \quad \langle S_y \rangle = \frac{6\hbar}{20} = \frac{3\hbar}{10}; \quad \langle S_z \rangle = \frac{8\hbar}{20} = \frac{4\hbar}{10}$$

En estadística se enseña que al medir una magnitud X y obtener los valores x_1, x_2, x_3, \dots el valor esperado es $\langle X \rangle$. También se puede calcular $\langle X^2 \rangle$ y a la expresión $\sigma = +\sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$ se le llama desviación standard y mide la dispersión de los datos respecto del valor medio, es decir, mide la INCERTIDUMBRE de la medida.

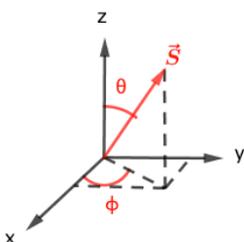
Pasa el spin \vec{S} , $\sigma = +\sqrt{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}$; $\langle S^2 \rangle = \langle \psi | S^2 | \psi \rangle = \frac{3\hbar^2}{4}$ (se puede calcular, ma matriz asociada a S^2 es $\sim I$)

$$\text{Como } \langle \vec{S} \rangle = \langle \psi | \vec{S} | \psi \rangle = \left(\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle \right) = \frac{\hbar}{10} (0, 3, 4),$$

$$\text{y } \langle S^2 \rangle = \langle \psi | \vec{S} | \psi \rangle \cdot \langle \psi | \vec{S} | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{100} (0^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{25\hbar^2}{100} = \frac{\hbar^2}{4}$$

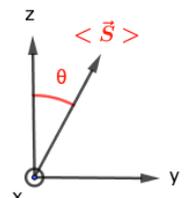
Tendremos que $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{|\vec{S}\rangle} \rangle = +\sqrt{\frac{3\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \neq 0$. Habrá pues una INCERTIDUMBRE en la medida del

$|\vec{S}\rangle$ que es intrínseca en QM.



$$\text{Tenemos que } \langle \vec{S} \rangle = \langle \psi | \vec{S} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{10} (0, 3, 4)$$

En coordenadas esféricas, como $\langle \vec{S} \rangle \subset YZ \rightarrow \phi = \pi/2$, y poniendo la



cámara enfocando al eje X , vemos que: $\cos\theta = \frac{\langle S_z \rangle}{|\langle \vec{S} \rangle|} = \frac{\frac{4\hbar}{10}}{\frac{\hbar}{2}} = \frac{4}{5}$; $\sin\theta = \frac{\langle S_y \rangle}{|\langle \vec{S} \rangle|} = \frac{\frac{3\hbar}{10}}{\frac{\hbar}{2}} = \frac{3}{5}$

Como $\langle \vec{S} \rangle = (0, \langle |\vec{S}| \sin\theta, \langle |\vec{S}| \cos\theta \rangle) = |\langle \vec{S} \rangle| (0, \sin\theta, \cos\theta)$, vamos a aplicar nuestros conocimientos y suponer que tenemos un dispositivo (MÁQUINA) que puede rotar sistemas cuánticos, en este caso, el SPIN (pe, campos magnéticos).. Nuestra MÁQUINA va a rotar un ángulo θ , en sentido positivo (mano derecha) alrededor del eje X , con lo que $\langle \vec{S} \rangle$ pasará a estar completamente sobre el eje Z y como $\langle \vec{S} \rangle = \hbar/2$ tendremos que : $R_x(\theta) \langle \vec{S} \rangle = (0,0,\hbar/2)$.

Pero, ¿cómo se rota un estado cuántico?, ¿un vector de dos componentes complejas?. Pues así de fácil, con $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}S_x}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$ y para calcular su valor esperado haremos: $\langle \tilde{\psi} | \vec{S} | \tilde{\psi} \rangle = (0,0,\frac{\hbar}{2})$

Cálculos previos: $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}S_x} = e^{-i\frac{\theta}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$; $i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I$;

Llamando: $\square = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \square^2 = -I$. También sabemos que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, luego:

$$e^{-i\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\frac{\theta}{2}\square}, \text{ con } \square^2 = -1; \text{ de donde}$$

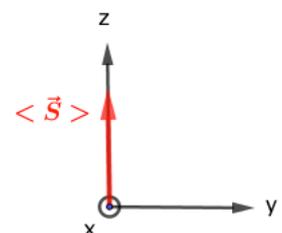
$$e^{-i\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) + \square \sin\left(\frac{-\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \square \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Tenemos pues que: $e^{-i\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$

Es sabido que: $\cos\theta/2 = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$; $\sin\theta/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$, por lo que:

$$\cos\theta/2 = \sqrt{\frac{1+4/5}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}}; \quad \sin\theta/2 = \sqrt{\frac{1-4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}}. \quad \text{Con esto, } e^{-i\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Aplicando ahora el giro θ entorno al eje X a $|\psi\rangle$:



$$|\widetilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} (3|1/2\rangle + i - 1/2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9+1 \\ -3i+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡Voilà! $|\widetilde{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2\rangle$, donde $|1/2\rangle$ es valor propio de S_z :

$S_z |1/2\rangle = \hbar/2 |1/2\rangle$. Luego, si midiésemos el valor esperado de S_z una vez hecha la rotación, con un 100% de probabilidad, nos daría $\hbar/2$. Lo que concuerda perfectamente con que después de la rotación tenemos $\langle \widetilde{S} \rangle$ en el eje Z

Vamos ahora a calcular el promedio $\langle \widetilde{S}_x \rangle$ de $\langle \widetilde{S}_y \rangle$ y de $\langle \widetilde{S}_z \rangle$:

$$\langle \widetilde{S}_x \rangle = \langle \widetilde{\psi} | S_x | \widetilde{\psi} \rangle = (1 \ 0) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \widetilde{S}_y \rangle = \langle \widetilde{\psi} | S_y | \widetilde{\psi} \rangle = (1 \ 0) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \widetilde{S}_z \rangle = \langle \widetilde{\psi} | S_z | \widetilde{\psi} \rangle = (1 \ 0) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}$$

¡Fantástico!, es lo que esperábamos, nuestro vector rotado da: $\langle \widetilde{\psi} | \vec{S} | \widetilde{\psi} \rangle = \left(0 \ 0 \ \frac{\hbar}{2} \right)$

Conclusión: $\langle \vec{S} \rangle$ funciona como un "vector" pero se calcula $\langle \psi | \vec{S} | \psi \rangle$, con $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Raro, raro, raro.

Si hacemos giros entorno a los ejes es como si girásemos la función de estado $|\widetilde{\psi}\rangle$ y cuando observamos el valor esperado del spin es ahora $\langle \widetilde{S} \rangle = \langle \widetilde{\psi} | \vec{S} | \widetilde{\psi} \rangle$. ¡Es la leche! En $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}(\hat{n}\cdot\vec{S})}$, es \vec{S} el que gira.

Javier García promete un nuevo vídeo para tratar el caso de $s = 1$ pero será en un futuro y tendremos el "JUGANDO CON EL SPIN (2/2)"

VÍDEO 15/17. "EL GRUPO DE POINCARÉ 1/3"

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ:
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

***** En el **apéndice V** se insertarán unas aclaraciones sobre **la transformación de Lorentz** extraídas del *video-curso de Javier García de Vídeos de Divulgación, "Introducción a la Relatividad Especial"*.

El grupo de Poincaré incluye la transformación de Lorentz, las rotaciones y las traslaciones. Toda teoría física ha de ser invariante bajo el grupo de Poincaré para que describa la realidad tal y como la observamos.

Estamos en el caso concreto de la relatividad especial, en un universo plano, no curvado por la gravedad (eso se analizará en el curso de Javier García de "Relatividad General").

Tenemos un espacio-tiempo de 4 dimensiones (espacio de Minkowski) con unas coordenadas x^0 (que será el tiempo t) y x^1, x^2, x^3 (que son las x, y, z de siempre). Por motivos dimensionales tomaremos $x^0 = ct$, así todas las coordenadas tendrán dimensiones de longitudes.

Definimos: $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Con ello, las tranf. De Lorentz se escriben como: $x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x^0 - \beta x^1); \quad x^{1'} = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x^1 - \beta x^0)$

Obviamente: $x^{2'} = x^2; \quad x^{3'} = x^3; \quad x^{0'} = ct'$. Estamos realizando un boost o tranf. de Lorentz en el eje X .

Vamos a comprobar que $(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$, que será lo que nos permitirá generalizar a un grupo de lie.

Como $x^{2'} = x^2; \quad x^{3'} = x^3$, bastará comprobar que $(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$. Por las trans. de Lorentz sabemos que: $x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1); \quad x^{1'} = \gamma(-\beta x^0 + x^1)$, con lo que:

$$\begin{aligned} (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 &= \gamma^2 (x^0 - \beta x^1)^2 - \gamma^2 (-\beta x^0 + x^1)^2 = \gamma^2 \left[(x^0)^2 + \beta^2 (x^1)^2 - 2\beta x^0 x^1 \right] - \gamma^2 \left[(x^0)^2 \beta^2 + (x^1)^2 - 2\beta x^0 x^1 \right] = \\ &= \gamma^2 \left[(1 - \beta^2) (x^0)^2 + (\beta^2 - 1) (x^1)^2 \right] = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[(1 - \beta^2) (x^0)^2 - (1 - \beta^2) (x^1)^2 \right] = (x^0)^2 - (x^1)^2 \end{aligned}$$

Una forma de expresar la cantidad $(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$ es: $(x^{0'} \ x^{1'} \ x^{2'} \ x^{3'}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$

Luego acabamos de ver que: $(x^{0'} \ x^{1'} \ x^{2'} \ x^{3'}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

Si llamamos Λ a la matriz que pasa de las coordenadas sin primas a las coordenadas con primas, $x \xrightarrow{\Lambda} x'$: $x' = \Lambda x$,

$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ transponiendo la ecuación: $(x^{0'} \ x^{1'} \ x^{2'} \ x^{3'}) = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \Lambda^T$ y sustituyendo más arriba:

$$(x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Conclusión: $\Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Lo que nos proporcionará la clave para encontrar estas

matrices Λ .

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g$ se le llama métrica. Tenemos una TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ GENÉRICA que va a

dejar INVARIANTE la MÉTRICA: $\Lambda^T g \Lambda = g$

Se llama BOOST a la relación entre dos sistemas de referencia que uno se mueve con velocidad v respecto del otro y en el que se cumplen las transformaciones de Lorentz: $x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$; $x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0)$; $x^{2'} = x^2$; $x^{3'} = x^3$. Como en este caso el sistema de referencia con primas se desplaza a velocidad v respecto del sistema sin primas, se suele hablar de un x-boost. También se puede hablar de y-boost, z-boost incluso de \hat{n} -boost (siendo \hat{n} una dirección arbitraria).

En grupos de Lorentz también caben las rotaciones, si son respecto del eje x^1 , la única coordenada que cambia es $x^{1'} = R x^1$. Las transformaciones de Lorentz incluyen boost y rotaciones. *Poincaré = Lorentz + traslaciones.*

Las rotaciones cumplen que $R R^T = I$, de ahí dedujimos que $\det(R) = \pm 1$ y elegimos $\det(R) = +1$ para representar a las rotaciones ordinarias. (el caso -1 podría ser de reflexiones).

Del mismo modo, ahora tenemos $\Lambda^T g \Lambda = g$; tomando determinantes: $\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(g) = -1$, luego $-1(\det(\Lambda))^2 = -1 \rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$. En el caso de tener $\det(\Lambda) = +1$ se dice que estamos ante una trans. Lorentz PROPIA y si $\det(\Lambda) = -1$ se dice que la trans. Lorentz es IMPROPIA.

Si el primer elemento de la matriz $\Lambda_{4 \times 4}$, $\Lambda_{1,1} > 0$, la transf. Es ORTOCRONA y si $\Lambda_{1,1} < 0$ ANTI-ORTOCRONA. El hecho de que sea ortocrona significa que t' y t tendrán el mismo signo.

Vamos a centrarnos en transformaciones de Lorentz PROPIAS y ORTOCRONAS (las otras tendrán su interés para casos de paridad en teoría cuántica de campos).

Vamos a empezar con los grupos de Lie. Recordar que en rotaciones hicimos que si $RR^T = I$ y consideramos una votación infinitesimal $R(\epsilon) = I + \epsilon G$, donde G era el generador de las rotaciones, vimos que debería ser antisimétrico: $G^T = -G$. Apliquemos esto a las transformaciones Λ de Lorentz.

Partimos de $\Lambda^T g \Lambda = g$ y consideramos una transf. Infinitesimal: $\Lambda \simeq I + A$. La transf. de Lorentz depende de un único parámetro, la velocidad v con que se mueve un sist. referencia respecto del otro. Obviamente, para $v = 0$ tenemos que $\Lambda(0) = I$ y para $v \ll c$: $\Lambda \simeq I + A$. Levando esto a la condición de que la transf. ha de dejar invariante la métrica ($\Lambda^T g \Lambda = g$), tenemos que:

$$(I + A)^T g (I + A) \simeq g; (I + A^T)g(I + A) \simeq g; (I + A^T)(g + gA) = g;$$

$$g + gA + A^T g + A^T gA = g; \text{ pero } A^T gA = O(A^2) \simeq 0, \text{ de donde: } gA + A^T g = 0$$

Atendiendo a la forma de $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, consideramos la matriz A como:

$$A = \begin{pmatrix} m & p_1 & p_2 & p_3 \\ n_1 & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ n_2 & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ n_3 & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}; \quad p^T = (p_1 \ p_2 \ p_3); \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}; \quad q_{3 \times 3}. \text{ Simplificando: } A = \begin{pmatrix} m & p^T \\ n & q \end{pmatrix} \text{ y } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la condición. $gA + A^T g = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & p^T \\ n & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n^T \\ p & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m & p^T \\ -n & -q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & -n^T \\ p & -q^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2m = 0 \rightarrow m = 0 \\ p^T - n^T = 0 \rightarrow p^T = n^T \rightarrow p = n \\ -n + p = 0 \rightarrow p = n \\ -q - q^T = 0 \rightarrow q + q^T = 0 \rightarrow q^T = -q \end{cases} \quad q_{3 \times 3} \text{ antisimétrica como en rotaciones.}$$

Por lo que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & -n_3 & n_2 \\ b & n_3 & 0 & -n_1 \\ c & -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$

Por todo lo visto hasta ahora en Grupos de Lie sabemos que al hacer una transformación infinitesimal $\Lambda = I + A$; $A^2 \simeq 0$, en un grupo de Lie se cumple que $\Lambda = e^A$, con lo que:

$$\Lambda = \exp \left[a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Expresión donde aparecen los generadores del grupo de Lorentz.

La notación oficial (por motivos que se explican en el vídeo-curso de "Relatividad General" de Javier García) para los 6 parámetros del grupo de Lorentz es, para a, b, c se usan, respectivamente $\omega^0_2; \omega^0_2; \omega^0_3$ y a las matrices a las que multiplican (generadores) K^1, K^2, K^3 que son los generadores de los boosts (transf. Lorentz) en las direcciones x, y, z y a los parámetros n_1, n_2, n_3 se les llama $\omega^2_3; \omega^1_3; \omega^1_2$ que multiplican a los generadores (matrices) J^1, J^2, J^3 que son los generadores de las rotaciones en los ejes x, y, z . Así:

$$\Lambda = \exp[\omega^0_1 K^1 + \omega^0_2 K^2 + \omega^0_3 K^3 + \omega^2_3 J^1 + \omega^1_3 J^2 + \omega^1_2 J^3]$$

Recordar que $e^{A+B} = e^A e^B$ solo si A y B conmutan. Es por ello que si, p.e., $\Lambda = \exp[2K^1 + 5J^3] \neq e^{2K^1} e^{5J^3}$, no podemos ver esto como la aplicación de un giro entorno al eje z y de un boost entorno al eje x , aunque hay un teorema que demuestra que un boost en cualquier dirección se puede descomponer como un boost alrededor de x (o de y o de z) y de dos rotaciones:

$$\Lambda = R \Lambda_x R'$$

Falta por introducir las traslaciones para tener un grupo de Poincaré que será decisivo para saber si una teoría física es o no viable.

$$\text{Grupo de Lorentz: } \{\Lambda / \Lambda^T g \Lambda = g\}, \text{ con } \Lambda = \exp[\omega^0_1 K^1 + \omega^0_2 K^2 + \omega^0_3 K^3 + \omega^2_3 J^1 + \omega^1_3 J^2 + \omega^1_2 J^3]$$

VÍDEO 16/17. "EL GRUPO DE POINCARÉ 2/3"

En este capítulo vamos a hacer un cambio en la métrica que no va a afectar para nada a los resultados obtenidos hasta ahora.

Coponderaremos $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Recordemos que :

Grupo de Lorentz: $\{\Lambda/\Lambda^T g \Lambda = g\}$, con $\Lambda = \exp[\omega^0_1 K^1 + \omega^0_2 K^2 + \omega^0_3 K^3 + \omega^2_3 J^1 + \omega^1_3 J^2 + \omega^1_2 J^3]$

Vamos ahora a escribir un boost el el eje x, un x-boost: $\Lambda = \exp[\omega K^1]$, donde $K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos pensar que los generadores del grupo de Lorentz son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b & oo & st \\ b & rot & aci & ones \\ oo & rot & aci & ones \\ st & rot & aci & ones \end{pmatrix}$

Continuemos con nuestro x-boost $\Lambda = \exp[\omega K^1]$ y busquemos su expresión matricial, aunque es de esperar que obtengamos: $x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$; $x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0)$; $x^{2'} = x^2$; $x^{3'} = x^3$ por lo que lo que deberíamos obtener es algo así como:

$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Cómo puede ser esto?, ¿quién es ω ? Al identificar lo que obtengamos con lo que esperamos le

daremos una interpretación a ω .

Para calcular $\Lambda = \exp\left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ usaremos un teorema que dice que si una matriz A es simétrica, es diagonalizable:

$A = MDM^{-1}$, con D una matriz diagonal (la de los valores propios) y ahora: $e^A = Me^D M^{-1}$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$

(donde los λ_i son los valores propios) y tendremos que para una matriz diagonal $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4} \end{pmatrix}$ y obtener la expresión

matricial del x-boost Λ .

Haciendo uso de un sw de cálculo matricial podemos obtener rápidamente que los vectores y valores propios de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

son: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow v.p.: 1$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow v.p.: -1$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow v.p.: 0$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow v.p.: 0$

M es la matriz de los vectores propios y D la de valores propios, podemos comprobar que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al aplicar ahora que $e^A = Me^DM^{-1}$, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^\omega & \frac{1}{2}e^{-\omega} - \frac{1}{2}e^\omega & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\omega} - \frac{1}{2}e^\omega & \frac{1}{2}e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos nuestro x-boost en función de ω : $\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

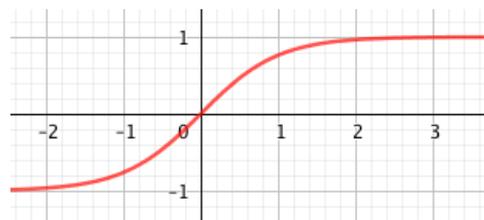
Al hacer $\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ e identificar el resultado obtenido con el que esperábamos, vemos que

$\cosh\omega = \gamma$; $\sinh\omega = -\gamma\beta$. ¡Caramba!, para arregla esto del signo menos podemos decir que para hacer un x-boost hay que poner $\Lambda = \exp[-\omega K^1]$ (en lugar de escribir $\Lambda = \exp[\omega K^1]$). Con esto:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \cosh\omega = \gamma \\ \sinh\omega = \gamma\beta \end{cases} \rightarrow \tanh\omega = \beta = \frac{v}{c} \rightarrow v = c \cdot \tanh\omega ; v \text{ y } \omega \text{ están}$$

relacionados.

v nunca puede ser mayor que c , la $\tanh \omega < 1$



$$\text{x-boost: } \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{y-boost: } \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & 0 & -\sinh\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & 0 & \cosh\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

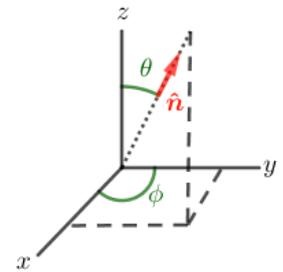
$$\text{z-boost: } \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & 0 & 0 & -\sinh\omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\omega & 0 & 0 & \cosh\omega \end{pmatrix}$$

$$v = c \cdot \tanh\omega$$

Vamos ahora a por un **\hat{n} -boost**. Usaremos coordenadas esféricas: $\hat{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$

***** En el **apéndice VI** se dan unas aclaraciones sobre **coordenadas esféricas** extraídas del video-curso de Javier García de Mini curso de MECÁNICA CUÁNTICA (A lo Feynman), "42-Dedución del Laplaciano en coordenadas esféricas", en los minutos 10 al 20.

En la dirección \hat{n} tenemos otro sistema de referencia x', y', z' que se desplaza a velocidad v respecto del sistema x, y, z y queremos relacionar las coordenadas de ambos, el boost.



Llamando $\hat{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) = (n_1, n_2, n_3)$, el boost que buscamos será: $\Lambda = \exp[-\omega(n_1 K^1 + n_2 K^2 + n_3 K^3)]$, pero hay un modo más práctico para este cálculo (se puede demostrar): $\Lambda = R_z(\phi)R_y(\theta)Boost_z(\omega)R_y(-\theta)R_z(-\phi)$

Vamos por otro asunto: los CONMUTADORES de los generadores del grupo de Lorentz.

$$[J^i, J^j] = \epsilon_{ijk} J^k; \quad [K^i, K^j] = -\epsilon_{ijk} J^k; \quad [J^i, K^j] = \epsilon_{ijk} K^k; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

Curioso: el conmutador de dos boost da una rotación y el de una rotación con un boost da un boost.

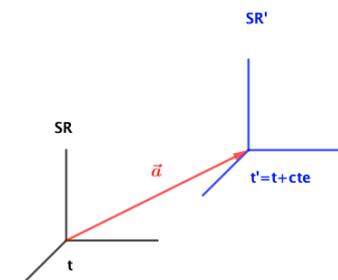
$\{J^1, J^2, J^3, K^1, K^2, K^3\}$ forman un álgebra cerrada, sus conmutadores dan combinaciones lineales de ellos mismos.

Y, ahora sí, vamos con las TRASLACIONES.

Velocidad SR' respecto de SR: $v = 0$

No hay rotaciones

Solo hay una separación espacio-temporal $\vec{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3) = cte$



La única forma de incluir estas traslaciones al grupo de Lorentz con los boost y rotaciones es hacer: $x' = \Lambda x + a$ y la única forma de arreglar matricialmente esto es usar coordenadas homogéneas (necesitaremos un 1 ficticio):

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x' = \Lambda x + a. \quad \text{En realidad, la transformación sería: } \begin{pmatrix} \Lambda_{4 \times 4} & a_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 1 \end{pmatrix}_{5 \times 5} = P \text{ y a. Esto es a lo que}$$

llamaremos transformación de Poincaré.

Los generadores del grupo de Poincaré serán: $\{J^1, J^2, J^3, K^1, K^2, K^3, P^0, P^1, P^2, P^3\}$, 10 parámetros.

Por ejemplo, para una transformación temporal tendremos que:

$$P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow e^{\alpha c P^0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a comprobarlo:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + \alpha c \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{como } x^0 = ct : \quad x^{0'} = ct + \alpha c = c(t + \alpha)$$

El GRUPO DE POINCARÉ (boost, rotaciones y traslaciones) tiene 10 generadores: $\{J^1, J^2, J^3, K^1, K^2, K^3, P^0, P^1, P^2, P^3\}$

Y las relaciones de conmutación ahora se amplían con:

$$\begin{aligned} [J^i, P^0] &= 0; \quad i = 1, 2, 3 \\ [J^i, P^j] &= \varepsilon_{ijk} P^k; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \\ [K^i, P^0] &= P^i; \quad i = 1, 2, 3 \\ [K^i, P^i] &= P^0; \quad i = 1, 2, 3 \\ [K^i, P^j] &= 0; \quad i \neq j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

En el próximo capítulo veremos la importancia del grupo de Poincaré, toda teoría física ha de ser invariante bajo transformaciones de Poincaré.

VÍDEO 17/17. "EL GRUPO DE POINCARÉ 3/3"

Estamos en un espacio-tiempo 4-dimensional donde la métrica viene dada por $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y las transformaciones de

Lorentz dejan invariante esta métrica, en el sentido que $\Lambda^T g \Lambda = g$. Con Λ tenemos cubiertas las transformaciones por boost (entre sistemas de referencia inerciales (que se mueven entre ellos con v constante) y las rotaciones.

También hemos introducido las traslaciones: $x' = \Lambda x + a$, con a un 4-vector del espacio-tiempo constante que mide la

traslación entre los sistemas de referencia: $\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = (\Lambda) \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$

Consideremos ahora dos sucesos A y B en el espacio-tiempo. En el sistema de referencia SR (sin primas) las coordenadas de A y B son $(x_A^0 \ x_A^1 \ x_A^2 \ x_A^3)$ y $(x_B^0 \ x_B^1 \ x_B^2 \ x_B^3)$. En el sistema de referencia SR' (con primas) las coordenadas son $(x_A^{0'} \ x_A^{1'} \ x_A^{2'} \ x_A^{3'})$ y $(x_B^{0'} \ x_B^{1'} \ x_B^{2'} \ x_B^{3'})$, donde: $x_A' = \Lambda x_A + a$ y $x_B' = \Lambda x_B + a$. Ahora calculamos el cuadro-vector que une los sucesos A y B : $4-vec = x_B - x_A$ y nos preguntamos por su "longitud". Hemos de hacer el producto escalar de $4-vec$ por sí mismo que sabemos que ha de ser invariante, independiente del sistema de referencia escogido.

$4-vec \cdot 4-vec = (x_B - x_A) \cdot (x_B - x_A) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \dots) g \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + \dots$, resultado que

esperamos que sea el mismo medido en SR' .

Luego, el producto escalar de un $4-vec$ por sí mismo: $(4-vec) \cdot (4-vec) = (\Delta x)^T g \Delta x$ representa la "longitud" al cuadrado del quadri-vector. (En el espacio-tiempo, dos vectores a y b , escasamente se multiplican como: $a \cdot b = a^T g b$).

Vamos a demostrar que la "longitud" es invariante bajo una transformación de Poincaré. Nos preguntamos si

$$\dot{?}(x_B' - x_A') \cdot (x_B' - x_A') = (x_B - x_A) \cdot (x_B - x_A)?$$

Como $(x_B' - x_A') = (\Lambda x_B + a) - (\Lambda x_A + a) = \Lambda x_B - \Lambda x_A = \Lambda(x_B - x_A)$, tendremos que

$$(x_B' - x_A') \cdot (x_B' - x_A') = \Lambda(x_B - x_A) \cdot \Lambda(x_B - x_A) = [\Lambda(x_B - x_A)]^T g \Lambda(x_B - x_A) = (x_B - x_A)^T \Lambda^T g \Lambda(x_B - x_A) =$$

Como $\Lambda^T g \Lambda = g$

$$= (x_B - x_A)^T g (x_B - x_A) = (x_B - x_A) \cdot (x_B - x_A) \quad qed$$

El producto escalar de un $4-vec$ por sí mismo, su "longitud" al cuadrado, es un INVARIANTE bajo transformaciones de POINCARÉ (y también de Lorentz, ya que al restar $x_B - x_A$ las traslaciones se anulan)

Ahora nos proponemos buscar una base en el espacio-tiempo y elegimos la $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

El cuadrivector anterior que unía dos sucesos del espacio tiempo A y B se escribirá, en esta base, como:

$$\begin{pmatrix} x_B^0 - x_A^0 \\ x_B^1 - x_A^1 \\ x_B^2 - x_A^2 \\ x_B^3 - x_A^3 \end{pmatrix} = (x_B^0 - x_A^0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_B^1 - x_A^1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_B^2 - x_A^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_B^3 - x_A^3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_B^0 - x_A^0)e_0 + (x_B^1 - x_A^1)e_1 + (x_B^2 - x_A^2)e_2 + (x_B^3 - x_A^3)e_3$$

Cualquier cuadrivector $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ ha de cumplir que $A \cdot A$ ha de ser un invariante Poincaré:

$$A \cdot A = (A^0, A^1, A^2, A^3) \cdot (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0)^2 e_0 e_0 + A^0 A^1 e_0 e_1 + \dots$$

$$\text{Pero: } e_0 \cdot e_0 = e_0^T g e_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\text{y } e_0 \cdot e_1 = e_0^T g e_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Se puede probar que: $e_0 e_0 = 1$; $e_i e_i = 1$; $i = 1, 2, 3$; $e_\mu e_\nu = 0$; $\mu \neq \nu : 0, 1, 2, 3$ (subíndices latinos: 1, 2, 3; subíndices griegos: 0, 1, 2, 3)

De otro modo: $e_\mu e_\nu = g_{\mu\nu}$ donde $g_{\mu\nu}$ es el elemento μ, ν de la métrica g .

$$\text{Luego, } A \cdot A = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$$

En otro SR' tendremos: $A = A^{0'} e_{0'} + A^{1'} e_{1'} + A^{2'} e_{2'} + A^{3'} e_{3'}$,

En SR' , $e_{0'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pero, ¿cómo se ve $e_{0'}$ en nuestra base de SR $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$?

$e_{0'} = M_{00} e_0 + M_{01} e_1 + M_{02} e_2 + M_{03} e_3$; y también $e_{1'} = M_{10} e_0 + M_{11} e_1 + M_{12} e_2 + M_{13} e_3$, etc.

En forma matricial: $\begin{pmatrix} e_{0'} \\ e_{1'} \\ e_{2'} \\ e_{3'} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$. Nuestro objetivo es encontrar esta matriz M .

$$A = A^{0'} e_{0'} + A^{1'} e_{1'} + A^{2'} e_{2'} + A^{3'} e_{3'} = (A^{0'} \ A^{1'} \ A^{2'} \ A^{3'}) \begin{pmatrix} e_{0'} \\ e_{1'} \\ e_{2'} \\ e_{3'} \end{pmatrix} = (A^{0'} \ A^{1'} \ A^{2'} \ A^{3'}) M \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Y queremos que coincida con $A = (A^0 \ A^1 \ A^2 \ A^3) \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

Luego: $(A^{0'} \ A^{1'} \ A^{2'} \ A^{3'}) M = (A^0 \ A^1 \ A^2 \ A^3)$, para que los dos observadores vean el mismo 4-vector.

Trasponiendo la ecuación anterior: $M^T \begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \\ A^{2'} \\ A^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$, más corto: $M^T A' = A$

Como $x' = \Lambda x + a \rightarrow \Delta x' = \Lambda \Delta x$ y, por ello, $A' = \Lambda A$ para que le "longitud" sea invariante.

ahora: $M^T A' = M^T \Lambda A = A \rightarrow M^T \Lambda = I$; $M^T \Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \rightarrow M^T = \Lambda^{-1}$, es decir: $M = (\Lambda^{-1})^T$

Para pasar de $e_{\mu'}$ a e_{μ} hay que multiplicar por $(\Lambda^{-1})^T$: $e_{\mu'} = (\Lambda^{-1})^T e_{\mu}$. Y $A' = \Lambda A$

En notación matricial standard: $\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^{0'} & \Lambda_1^{0'} & \Lambda_2^{0'} & \Lambda_3^{0'} \\ \Lambda_0^{1'} & \Lambda_1^{1'} & \Lambda_2^{1'} & \Lambda_3^{1'} \\ \Lambda_0^{2'} & \Lambda_1^{2'} & \Lambda_2^{2'} & \Lambda_3^{2'} \\ \Lambda_0^{3'} & \Lambda_1^{3'} & \Lambda_2^{3'} & \Lambda_3^{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x_{\nu}$, donde hemos usado la notación de

Einstein de que los índices repetidos se suman.

Para cualquier cuádrivector, sus componentes cambian como $A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}$. Para los vectores de la base teníamos

$e_{\mu'} = (\Lambda^{-1})^T e_{\mu}$. Con la nueva notación standard: $(\Lambda^{-1})^T = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \Lambda_1^2 & \Lambda_1^3 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2^1 & \Lambda_2^2 & \Lambda_2^3 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3^1 & \Lambda_3^2 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \rightarrow e_{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu} e_{\nu}$

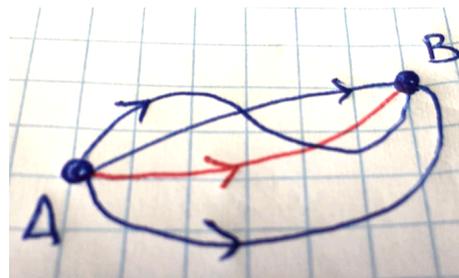
En conclusión. $A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3$ en SR , o $A = A^{0'} e_{0'} + A^{1'} e_{1'} + A^{2'} e_{2'} + A^{3'} e_{3'}$ es SR' es un cuádrivector si sus componentes se transforman como $x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x_{\nu}$ y los vectores de la base como $e_{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu} e_{\nu}$ y ello implica que $A \cdot A$ es un invariante Poincaré.

Ahora, en física relativista, para hablar de vectores necesitamos que sean invariantes de Poincaré.

¿Cual es la ley que rige el movimiento de las partículas?: Principio de Mínima Acción:

Para cada teoría hay que construir una ACCIÓN relativista que nos dirá cómo se moverán las partículas en el espacio-tiempo.

De todas las posibles trayectorias para que una partícula de masa m vaya del punto A al B del espacio-tiempo, la correcta será aquella que minimiza la acción.



Para la acción necesitamos que:

- * sea una magnitud escalar e invariante Poincaré (dar lo mismo en los diferentes SR inerciales que consideremos)

* Debe proporcionar las leyes de Newton para $v \ll c$

El escalar que cumple todo esto es el INTERVALO ("longitud" al cuadrado): ds^2

$$ds^2 = dx \cdot dx = (dx)^T g dx = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2; ds = +\sqrt{ds^2}$$

Y definir la acción como: $accion = \int_A^B ds$, pero esto tiene un problema, para $v < c$, permitido, $ds^2 < 0$ y tendríamos problemas con la raíz. Para corregirlo se toma:

$$accion = \int_A^B \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} = \rightarrow$$

Lo que realmente estamos calculando es el *tiempo propio*, el que mediría un observador montado sobre la partícula que viaja por el espacio tiempo entre A y B . Cualquier otro observador medirá un tiempo siempre mayor, pero todos coincidirán en el mismo tiempo propio (invariante Poincaré).

$$\rightarrow = \int_A^B \sqrt{\frac{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}{(dt)^2}} dt = \rightarrow$$

$$\text{Como } \left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 = \left(\frac{cdt}{dt}\right)^2 = c^2; \quad \left(\frac{dx^1}{dt}\right) = v_x = \dot{x}$$

$$\rightarrow = \int_A^B \sqrt{c^2 - \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_A^B \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} = \int_A^B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rightarrow$$

Por Taylor: $f(x) = \sqrt{1-x^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2$, para x pequeños. Haciendo $x = v/c$:

$$\rightarrow = \int_A^B c \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) dt = \int_A^B \left(c - \frac{v^2}{2c}\right) dt$$

Algo falta, esperábamos algo similar al resultado clásico para $v \ll c$: $\int \left(\frac{1}{2}mv^2 - V(x)\right) dx$, para una partícula libre

$V(x) = 0$, algo como. $\int \frac{1}{2}mv^2 dx$. Veamos como arreglarlo:

$$\text{Tenemos: } c \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \simeq c - \frac{v^2}{2c}, \text{ quisiéramos: } \frac{1}{2}mv^2$$

$$-c \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \simeq \frac{v^2}{2c} - c; \quad -c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \simeq \frac{v^2}{2c}c - c^2 = \frac{v^2}{2} - c^2; \quad -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - mc^2$$

El término $-mc^2$ no es preocupante, ya que en $\int_A^B K$, una constante no afecta. Luego hay que derivar.

La acción correcta a considerar, para que sea invariante Poincaré y que reproduzca la mecánica newtoniana cuando $v \ll c$ es:

$$accion = \int_A^B -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt$$

Ahora hay que buscar la mínima acción.
Esto lo resolvieron Euler y Lagrange.

***** En el **apéndice II** se dan unas aclaraciones sobre **ecuaciones de Euler-Lagrange** extraídas del *video-curso de Javier García de Mini curso de MECÁNICA CUÁNTICA (A lo Feynman), "2-Funcional y derivada funcional y 3-Lagrangiano"*.

Llamando $\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$ (lagrangiano) y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = -mc^2 \frac{-2v_x/c^2}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv_x}{\text{sqr}t{1 - \beta^2}} = \gamma_{(v)}(mv_x)$$

$$\text{Obviamente, } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} = \gamma_{(v)}(mv_y); \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = \gamma_{(v)}(mv_z);$$

Hablando del tri-vector velocidad (para este caso se conserva la notación con flechitas) $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \gamma_{(v)}(m\vec{v}).$$

Ahora hay que calcular: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. Lo que significa que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \right) = 0$, luego. $\frac{d}{dt} \left(\gamma_{(v)} m\vec{v} \right) = \vec{0}$, pero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \vec{p}, \text{ el tri-momento. Luego: } \gamma_{(v)} m\vec{v} = \vec{p} = \overline{cte}$$

Pero deseamos trabajar con cuadri-momentos: $p = p^0 e_0 + p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3 = p^0 e_0 + \vec{p}$, con \vec{p} el tri-momento.

De momento, las leyes de la naturaleza nos dicen que nuestra partícula libre ha de tener $\vec{p} = \overline{cte}$. Asumimos que p será tal que $p = cte$ y, por otro lado, p^2 ha de ser un escalar de Poincaré.

$$p^2 = p \cdot p = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = cte = b. \quad \text{¿qué valdrá } p^0?$$

$$b = -(p^0)^2 + \gamma^2 m^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = -(p^0)^2 + \gamma^2 m^2 v^2, \text{ por lo que}$$

$$(p^0)^2 = \gamma^2 m^2 v^2 - b; \quad p^0 = \sqrt{\gamma^2 m^2 v^2 - b} = \sqrt{\frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} - b} = \sqrt{\frac{m^2 v^2 - b + \frac{v^2}{c^2} b}{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Como } \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \text{ deseamos } p^0 = \gamma m c, \text{ tomando } b / m v^2 + \frac{v^2}{c^2} b = 0, \text{ tendremos } p^0 = \sqrt{\frac{-b}{1 - v^2/c^2}} = \gamma \sqrt{-b}$$

$$\text{Con esta imposición. } m^2 v^2 + \frac{v^2}{c^2} [-m^2 c^2] = 0, \text{ tendremos que tomar. } b = -m^2 c^2 = cte$$

Así tendremos que $p^0 = \gamma \sqrt{-b} = \gamma \sqrt{m^2 c^2} = \gamma m c$ y todo cuadra. $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$; $p^0 = \gamma m c \rightarrow p = p^0 + \vec{p}$ y ya tenemos el cuadri-vector momento.

Conclusión: una partícula libre relativista responde a una $accion = \int_A^B -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt$ y las ecuaciones de

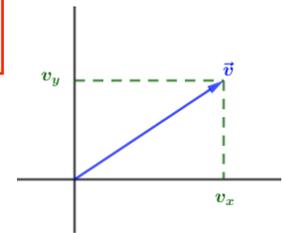
movimiento son que $\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = 0$ que equivale a decir que el cuadri-momento es constante:

$$p = \gamma m c e_0 + \gamma m v_x e_1 + \gamma m v_y e_2 + \gamma m v_z e_3 = cte.$$

En una colisión relativista, el cuadri-momento es constante: $P_1^i + p_2^i = p_1^f + p_2^f$

En próximos vídeos trataremos la derivada de Lie, útil en relatividad general.

APÉNDICE I: VALORES Y VECTORES PROPIOS. (Video curso "Mini curso de MECÁNICA CUÁNTICA, a lo Feynman", capítulo 8, de Javier García)



Empecemos con unos recordatorios:

Una base de un espacio vectorial en \mathbb{R}^2 son dos vectores $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ linealmente independientes, es decir, de distinta dirección. Cualquier otro vector \vec{z} se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de la base B, así: $\vec{z} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 = (x', y')_B$. x', y' son las componentes de \vec{z} en la base B.

En física nos interesan las bases ortonormales: los vectores de la base han de ser ortogonales $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ y han de estar normalizados, es decir, su módulo ha de ser 1, $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$. A esta base, la más sencilla de \mathbb{R}^2 se le llama base canónica: $C = \{(1,0), (0,1)\} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

CAMBIO DE BASE: Consideremos la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, con $\vec{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y})_C$; $\vec{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y})_C$ (vectores básicos de B tal y como se expresan cada uno de ellos en la base canónica C). Si $\vec{v} = (x', y')_B$, ¿cómo se expresará ese vector en la base C?

$$\begin{aligned} \vec{v} = (x', y')_B &= x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 = x'(u_{1x}\vec{i} + u_{1y}\vec{j}) + y'(u_{2x}\vec{i} + u_{2y}\vec{j}) = \\ &= (x'u_{1x} + y'u_{2x})\vec{i} + (x'u_{1y} + y'u_{2y})\vec{j} = (x'u_{1x} + y'u_{2x}, x'u_{1y} + y'u_{2y})_C \end{aligned}$$

Si expresamos los vectores como matrices columna en vez de como matrices fila, podemos escribir la transformación de cambio de base matricialmente así:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_B \rightarrow \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_C$$

La matriz de cambio de base de la $B \rightarrow C$ está formada por las componentes de los

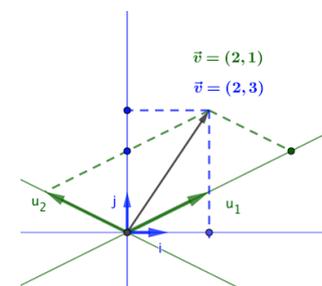
vectores de la base B expresados en la base C en forma de vectores columna: $(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix}$.

Veamos un ejemplo numérico:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}; \quad \vec{u}_1 = (2,1)_C; \quad \vec{u}_2 = (-2,1)_C$$

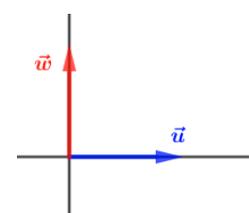
$$\vec{v} = (2,1)_B = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 2(2\vec{i} + \vec{j}) + (-2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{j} = (2,3)_C$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_C = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Las matrices 2×2 , en \mathbb{R}^2 , transforman unos vectores en otros: $A\vec{v} = \vec{w}$. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ en la base canónica } C, \text{ gira los vectores un ángulo de } +90^\circ.$$



$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w}$$

El problema es, si queremos rotar $+90^\circ$ un vector de la base B , lo que podemos hacer es, mediante la matriz de cambio de base de $B \rightarrow C$, aplicársela al vector, una vez escrito el vector en C aplicarle la matriz A de rotación y luego usar la matriz inversa del cambio de base $(B \rightarrow C)^{-1} = C \rightarrow B$, para volver a escribir el vector en su base B original:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_B \rightarrow \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_C. \quad \text{Ahora la rotación: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad \text{Y, por último, volvemos a expresar este vector en su base } B \text{ original: } \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Podemos considerar esto como el cambio de base de la matriz $A_C \rightarrow A_B$, de este modo:

$$A_B = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot A_C \cdot \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix} = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)^{-1} A_C (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2); \quad \text{donde } \vec{u}_k = \begin{pmatrix} u_{kx} \\ u_{ky} \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2 \text{ son los vectores de la base } B \text{ expresados en la base } C. \text{ Para recordar la fórmula, la podemos escribir así: } A_B = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)^{-1} A_C (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)$$

También podemos pasar una matriz de C a B : $A_C = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2) A_B (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)^{-1}$ (No hay más que recordar cómo se despejan las ecuaciones matriciales: $X = MYN^{-1} \rightarrow M^{-1}XN = M^{-1}MYN^{-1}N = IYI = Y$)

Ahora ya estamos preparados para meternos con los valores y vectores propios o diagonalización de matrices.

VALORES Y VECTORES PROPIOS.

Consideremos la matriz A , que expresada en la base canónica C tiene la forma: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Nos preguntamos, ¿existirá una base B en la que esta matriz sea diagonal?

Recordar que una matriz cuadrada es diagonal si $a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j \quad \wedge \quad a_{ii} \neq 0$

Si la respuesta a la pregunta es sí, podemos diagonalizar matrices.

A la base en que la matriz se puede diagonalizar se le llama BASE PROPIA, que estará formada por los VECTORES PROPIOS y los valores de la diagonal principal de la matriz diagonalizada se les llama VALORES PROPIOS.

En nuestro ejemplo $A_C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Los vectores \vec{u}_1, \vec{u}_2 , expresados en B tiene por componentes,

obviamente: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lo que ha de pasar es que: $A_B \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{u}_1; \quad A_B \vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$

Tenemos que hacer:

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es un sistema HOMOGÉNEO de ecuaciones lineales, y por ello siempre compatible. Si fuese compatible DETERMINADO, la única solución que admitiría el sistema es la solución trivial $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a todas luces indeseable, así que lo que debemos exigir

es que nuestro sistema sea compatible INDETERMINADO y que tenga infinitas soluciones, para ello basta con que

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (5-\lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow (5-\lambda)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} 5-\lambda = -1 \rightarrow \lambda_1 = 6 \\ 5-\lambda = 1 \rightarrow \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Ya hemos encontrado los VALORES PROPIOS al exigir que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Al ser el sistema compatible indeterminado solo queda libre una ecuación, p.e. la primera:

$$(5-\lambda)x + y = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \rightarrow -x + y = 0 \rightarrow y = x \rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 = 4 \rightarrow x + y = 0 \rightarrow y = -x \rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Conclusión, la matriz $A_C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ se puede diagonalizar como $A_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Vamos ahora a ver una aplicación física de todo esto con un ejemplo. Supóngase que se dispone de una función de dos variables $V(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$ (en mecánica cuántica no nos gustará que aparezcan estos productos cruzado x y y y veremos que podemos escribir V matricialmente y que dicha matriz se puede diagonalizar en una nueva base, en la cual se podrá escribir V sin productos cruzados).

Se puede expresar V (potencial) matricialmente así:

$$V = (x \ y) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} 5x + y \\ x + 5y \end{pmatrix} = 5x^2 + xy + xy + 5y^2 = 5x^2 + 2xy + 5y^2$$

Sabemos que la matriz $A_C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ se puede diagonalizar como $A_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para cambiar de la base C a la base B hacemos: $(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, nueva notación.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

Despejando la x y la y en función de q_1 y q_2 y llevando el resultado a la expresión de $V(x, y)$, tenemos:

$$\frac{x+y}{2} = q_1 \rightarrow x+y = 2q_1 \implies x = q_1 + q_2$$

$$\frac{x-y}{2} = q_2 \rightarrow x-y = 2q_2 \implies x = q_1 - q_2$$

De donde:

$V(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 = 5(q_1 + q_2)^2 + 2(q_1 + q_2)(q_1 - q_2) + 5(q_1 - q_2)^2 = 2(6q_1^2 + 4q_2^2)$ (nótese que ya no hay productos cruzados $q_1 q_2$. Donde 6 y 4 los autovalores de la matriz en la base propia $B = \{q_1, q_2\}$).

En palabras de Javier García, "Una matriz puede intervenir en nuestro mundo de vectores para hacer de ellos una vida mejor."

APÉNDICE II: EL LAGRANGIANO. (Video curso "Mini curso de MECÁNICA CUÁNTICA, a lo Feynman", capítulos 2 y 3, de Javier García)

Un FUNCIONAL es un operador matemático que transforma funciones en números reales: $s[f(x)] \in \mathbb{R}$

Un ejemplo de funcional podría ser $s[f(x)] = \int_0^1 f(x) dx$

$$s[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1/3 ; \quad s[\sin x] = \int_0^1 \sin x dx = [-\cos x]_0^1 = -\cos 1 + 1 \simeq 0.46$$

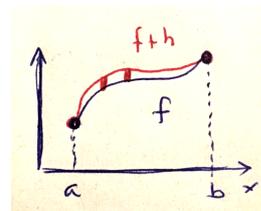
Otro ejemplo de funcional podría ser: $s[f(x)] = \int_0^1 ([f(x)]^2 + [f'(x)]^2) dx$

$$\text{ahora, } s[x^2] = \int_0^1 [(x^2)^2 + (2x)^2] dx = \int_0^1 (x^4 + 4x^2) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} \right]_0^1 = 1/5 + 4/3 = 23/15$$

Por notación, llamamos $L = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, y así, en general, $s[f] = \int_a^b L(f, f') dx$ será un funcional.

Nos preguntamos ahora, ¿se puede derivar un funcional?.

Consideremos un pequeño cambio en la función $f(x)$, ahora será $\delta f(x) = f(x) + h(x)$ con las condiciones que $h(a) = h(b) = 0$ (la función y su función cambiada coinciden en los extremos del intervalo) ($f(x)$ y $f(x) + h(x)$) y que difieran poco en $]a, b[$, $h(x)$ pequeño. La derivada del funcional medirá como cambia el funcional al cambiar un poco la función. (δ indica cambio)



DERIVADA FUNCIONAL: $\frac{\delta s}{\delta f}$

$$s[f] = \int_a^b L(f, f') dx ; \quad s[f + h] = \int_a^b L(f + h, f' + h') dx$$

$$\delta s = s[f + h] - s[f] = \int_a^b \{ L(f + h, f' + h') - L(f, f') \} dx = \int_a^b \delta L dx$$

Como, para funciones de dos variables e cumple que: $f(x, y) \rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$, tendremos que:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial f} \delta f + \frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' \text{ y entonces: } \delta S = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f} \delta f dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' dx$$

Integrando por partes la última integral: $\left(\int u dv = uv - \int v du \right)$ Si $u = \frac{\partial L}{\partial f'} \rightarrow du = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial f'} \right] y$

$$dv = \delta f' dx \rightarrow v = \delta f. \text{ Tendremos: } \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' dx = \left[\frac{\partial L}{\partial f'} \cdot \delta f \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial f'} \right] \delta f dx$$

Recordad que δf es lo que habíamos llamado $h(x)$ y que $\delta f = h(x)]_a^b = h(b) - h(a) = 0$ tal y como habíamos impuesto, con lo que la primera parte del resultado de aplicar el método por partes se anula.

Tenemos que: $\delta S = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f} \delta f dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial f'} \right] \delta f' dx$. Agrupando en una sola integral:

$\delta s = \int_a^b \delta f \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \right] dx$. Y ahora, por enésima vez nos perdonarán los matemáticos, pasando δf dividiendo:

$$\frac{\delta s}{\delta f} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \right] dx \text{ que es a lo que llamamos derivada funcional.}$$

Vamos a obtener las leyes de Newton de la mecánica clásica. Ahora la variable independiente es el tiempo ($x \rightarrow t$) y la variable dependiente es la posición ($f(x) \rightarrow x$) ($f'(x) \rightarrow \dot{x} = v$). Con esta notación:

$$s[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L[x, \dot{x}] dt \quad \text{y} \quad \frac{\delta s}{\delta x(t)} = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt$$

Deseamos crear un funcional s / $\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0$ (haya un mínimo) y de aquí se deben deducir las leyes de Newton.

Para que $\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0$ basta con que se anule el integrando: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$, es decir $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$

Esto ha de ser equivalente a $F = ma = m \frac{d}{dt} v = \frac{d}{dt}(mv)$; $m = cte$. Luego: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv = m\dot{x}$ y $\frac{\partial L}{\partial x} = F$.

En el caso de tener fuerzas conservativas: $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ (V es la energía potencial). Ha de ocurrir que. $L = -V + algo(\dot{x})$,

así, $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + 0 = F$. Veamos quién ha de ser ese "algo":

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(-V(x)) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} algo = 0 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} algo = mv = m\dot{x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{x}} algo = m\dot{x} \rightarrow algo = \int m\dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

Luego: $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V$. Así debe ser L para que se obtengan las leyes de Newton.

A este L se le llama LAGRANGIANO, \mathcal{L} = "cinética - potencial". Al funcional s se le llama ACCIÓN $s = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt$ y esto

reproduce las leyes de Newton. Par un $V(x)$ dado, la trayectoria $x(t)$ será aquella que minimice la acción: $\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0$

Veamos un ejemplo: $V(x) = mgx$

$-\frac{\partial V}{\partial x} = -mg = F$ Fuerza que siente la partícula que la tira hacia abajo.

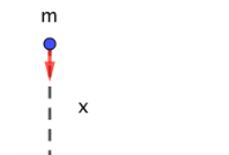
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx$$

$$\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -mg \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + mg = 0 \rightarrow m \frac{d}{dt} \dot{x} + mg = 0 \rightarrow m\ddot{x} = -mg \rightarrow \ddot{x} = -g$

Es decir: $a = -g$ y a partir de aquí: $v = \int a dt = -gt + v_0$ y $x = \int v dt = -gt^2/2 + v_0 t + x_0$

Hemos obtenido: $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ que es la trayectoria de una partícula libre en un campo gravitatorio.



APÉNDICE III: TEOREMA DE NOETHER. (Video de Javier García "Grupos, Simetrías y el Teorema de Noether en Física Teórica")

TEOREMA de NOETHER.

Grupos de Lie y simetrías en Física

Se trata de entender una frase:

"Una teoría invariante bajo la acción del grupo **SO(3)** conserva el **momento angular**".

La charla se divide en 6 partes:

- Aproximación de funciones
- Rotaciones
- Grupos de Lie
- Formulación Lagrangiana de la física
- Teorema de Noether
- Conclusion

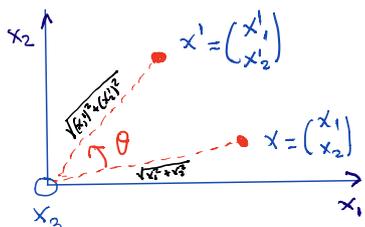
APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

Para desplazamientos ϵ infinitesimales ($\epsilon^2 \approx 0$), la primera aproximación

de una función (Taylor) es: $f(x+\epsilon) \approx f(x) + \epsilon \frac{df}{dx}$

Esto es aplicable a funciones de varias variables: $f(x_1+\epsilon_1, x_2+\epsilon_2) \approx f(x_1, x_2) + \epsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \epsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$

ROTACIONES



lo que permanece constante (INVARIANTE) bajo ROTACIONES es el módulo (distancia)

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}$$

Por comodidad, consideraremos invariante bajo rotaciones la cantidad: $x_1^2 + x_2^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2$

Nos preguntamos: ¿La ROTACIÓN es lineal?

$$x' = R_\theta x; \quad y' = R_\theta y \rightarrow \dot{c} (x+y)' = x' + y' ?$$

Resultado: Sí. Un teorema matemático asegura que al ser la rotación lineal, existe una MATRIZ R que la implementa

La pregunta ahora es: ¿quién es la matriz R? $x'_{2x1} = R \cdot x_{2x1} \rightarrow R$ ha de ser matriz 2x2

Notación y cálculos sencillos:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x^T = (x_1 \ x_2); \quad x^2 = x^T x = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 = (x')^T \cdot x' \implies x^T \cdot x = (x')^T \cdot x' \uparrow \text{invariante}$$

Como $x' = Rx \implies (x')^T \cdot x' = (Rx)^T \cdot (Rx) = x^T R^T R x = x^T \cdot x$ (invariante) \implies

$\implies \boxed{R^T R = I}$ R es una matriz **ORTOGONAL**, además $\det(R) = 1$

por lo que R es una matriz **ESPECIAL (SPECIAL)**:

$$\boxed{SO(2) = \{ R \mid R^T R = I \text{ y } \det(R) = 1 \}}$$

(si tomásemos $\det(R) = -1$ tendríamos REFLEXIONES, no ROTACIONES)
(Rotar 0 a leer $R = I$ y $\det(I) = +1$)

GRUPO DE LIE

GRUPO: (G, \circ) Conjunto, \circ operación interna; $g_1, g_2, g_3 \in G$

- asociativa: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$
- neutro: $\exists! e \in G \forall g \in G: e \circ g = g \circ e = g$
- inverso: $\forall g \in G \exists! g^{-1} \in G: g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

¿SO(2) es un grupo?

$$SO(2) = \{ R(\theta) \mid R^T \cdot R = I \text{ y } \det(R) = 1 \}$$

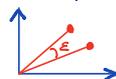
operación: $R(\theta_2) \circ R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$

(producto de matrices) \implies SÍ:

producto matrices cumple la asociativa, el neutro $R(0) = I$, por cada $R(\theta)$ existe $R(-\theta)$ y así $R(\theta) \cdot R(-\theta) = R(0) = I$

Como $SO(2)$ es un grupo de infinitos elementos, se puede girar cualquier grado (R), y es continuo, tenemos un GRUPO de Lie.

Por, ¿cómo está definida $R(\theta)$? Veamos una rotación infinitesimal $R(\epsilon)$, con $\epsilon \ll 1$:



$$\theta = N \epsilon = N \left(\frac{\theta}{N}\right)$$

$$R(\theta) = R\left(\frac{\theta}{N}\right) \cdot R\left(\frac{\theta}{N}\right) \cdots R\left(\frac{\theta}{N}\right) = \left[R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right]^N$$

Ahora usaremos la aproximación de función: $R(D+\epsilon) \approx I + \epsilon \frac{dR(\theta)}{d\theta}$: $R\left(\frac{\theta}{N}\right) \approx I + \frac{\theta}{N} G$

¿Cómo voy a obtener $\frac{dR}{d\theta}$ si no sé R ? No importa, tendríamos $\frac{dR}{d\theta}(0)$ serían 4 números a lo que llamamos matriz G .

G es la matriz generadora del grupo de las rotaciones.

$$R(\theta) = \left(I + \frac{\theta}{N} G\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R(\theta) = e^{\theta G}$$

G ha de cumplir: $R(\theta)^T \cdot R(\theta) = I \rightarrow (I + \epsilon G^T)(I + \epsilon G) = I + \epsilon G + \epsilon G^T + \epsilon^2 G^T G = I + \epsilon G + \epsilon G^T = I \rightarrow$

$\epsilon(G + G^T) = 0 \rightarrow G = -G^T$ ANTISIMÉTRICA \Rightarrow GENERADOR: $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Taylor: $e^{\theta G} = I + \theta G + \frac{1}{2!} \theta^2 G^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 G^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 G^4 + \dots \rightarrow R(\theta) = e^{\theta G} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

y esto lo hemos obtenido de exigir que las rotaciones conserven el módulo y que formen un grupo continuo (Lie)

FORMULACIÓN LAGRANGIANA de la FÍSICA. $\mathcal{L} = T - V$, Acción = $\int_a^b \mathcal{L} dt \rightarrow$ Ecuaciones de EULER-LAGRANGE:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)$$

Toda teoría que se precise ha de tener un lagrangiano. El sistema físico evoluciona de modo que la acción sea la mínima posible (Principio de mínima acción). Fueron Euler, Lagrange los que resolvieron lo de encontrar el mínimo para la acción.

TEOREMA de NOETHER. $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ ¿qué es una simetría continua?} \\ 2) \text{ ¿qué significa que el tiempo una simetría continua?} \end{array} \right.$

\mathcal{L} es una magnitud escalar (un número): $\mathcal{L}(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}$. Si la posición y velocidad lo rotamos mediante $R(\theta)$, ¿será \mathcal{L} invariante? . A veces sí y a veces no.

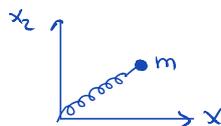
Si un \mathcal{L} es invariante bajo rotaciones, entonces se dice que la teoría tiene una simetría $SO(2)$.

TEOREMA de NOETHER: "Si el lagrangiano \mathcal{L} es INVARIANTE bajo una simetría continua, entonces existe una LEY de conservación asociada."

$$P = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right)^T G x = \text{constante}$$

↑
GENERADOR de la simetría

Veamos algún ejemplo:



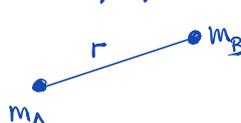
$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (v_1^2 + v_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2)$
 Se observa que una rotación \mathcal{L} se conserva \rightarrow Esto \mathcal{L} es simétrico bajo el grupo de rotaciones $SO(2)$

¿Cuál será la magnitud que se conserva?

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix} \rightarrow Q = (\mu v_1 \quad \mu v_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \mu v_2 - x_2 \mu v_1 = L_3 = cte$$

"La tercera componente del momento angular se conserva en el tiempo"

Otro ejemplo:



Descripción: la fuerza sólo depende de la distancia entre los cuerpos $V(r)$
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \frac{1}{2} \mu v_B^2 - V(r)$

Ahora, este Lagrangiano es simétrico bajo $SO(3)$. Haciendo los cálculos se llega a que $L_{total} = cte$.

CONCLUSIONES.

- Conocer el generador de una simetría continua del \mathcal{L} define la magnitud que se conserva.
- Para determinar el generador nos basta con hacer una transformación infinitesimal.
- Las simetrías de una teoría nos permiten conocer de antemano que \mathcal{L} están prohibidos.
- Los grupos de Lié son una herramienta muy poderosa.

APÉNDICE IV: OPERADOR MOMENTO en QM. (Video-curso de Javier García de "Mecánica Cuántica a lo Feynman, capítulo 31.)

En el espacio de Hilbert de las funciones $|\psi(x)\rangle$, que es de dimensión infinita, \mathcal{H}^∞ , consideramos el operador $-i\frac{d}{dx}$ que vamos a comprobar que es hermitico, por lo que se corresponderá con un observable.

$$-i\frac{d}{dx} \text{ es hermitico si } \langle f | -i\frac{d}{dx} | g \rangle^* = \langle g | -i\frac{d}{dx} | f \rangle$$

En \mathcal{H}^∞ , $\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^* g dx$, las funciones son de cuadrado integrable: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ y además,

$$f(\infty) = g(\infty) = 0$$

$$\langle f | -i\frac{d}{dx} | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^* (-i)\frac{d}{dx} g = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f^* g' dx = -i [f^* g]_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{-\infty}^{+\infty} g f^{*'} dx = 0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} g f^{*'} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} g f^{*'} dx$$

Y al conjugar,

$$\langle f | -i\frac{d}{dx} | g \rangle^* = \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} g f^{*'} dx \right]^* = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g^* f' dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^* \left(-i\frac{d}{dx} \right) f dx = \langle g | -i\frac{d}{dx} | f \rangle$$

Pero, ¿qué es lo que observa el operador hermitico $-i\frac{d}{dx}$? Lo que se observa son los valores propios del operador diagonalizado.

$$-i\frac{d}{dx} \psi(x) = \lambda \psi(x) \quad (\lambda \text{ valores propios } \mathbb{R}), \text{ de otro modo: } \psi' = i\lambda \psi. \text{ Necesariamente } \psi(x) = b e^{i\lambda x}, \text{ así:}$$

$\psi' = (b e^{i\lambda x})' = b i \lambda e^{i\lambda x} = i\lambda \psi$. Luego el operador $-i\frac{d}{dx}$ tiene como funciones propias $\psi_\lambda(x) = b e^{i\lambda x}$ y como valores propios $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dimensionalmente, $-i\frac{d}{dx}$ es de la forma $\frac{1}{L}$. Las notas de materia son $\psi \sim e^{-i\frac{Et}{\hbar} + i\frac{px}{\hbar}}$ lo que nos hace pensar que $\lambda = \frac{p}{\hbar}$

$$\psi_p(x) = b e^{i\frac{px}{\hbar}} \quad (\text{más adelante se ve que } b = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}). \text{ Deducimos: } -i\frac{d}{dx} \psi = \frac{p}{\hbar} \psi \rightarrow -i\hbar\frac{d}{dx} \psi = p \psi$$

El operador hermitico (observable) $-i\hbar\frac{d}{dx}$ OBSERVA los valores propios p .

Dimensionalmente: $-i\hbar\frac{d}{dx} \sim [\hbar]\frac{1}{L} \sim \frac{ET}{L} \sim \frac{M\frac{L^2}{T^2}T}{M} \sim \frac{ML}{T} \sim M[v] \sim p$. A. $-i\hbar\frac{d}{dx}$ se le llama OPERADOR MOMENTO P. Se puede medir la cantidad de movimiento de una partícula.

APÉNDICE V: INTRODUCCIÓN A LA RELATIVIDAD ESPECIAL. (Video-curso de Javier García de "Introducción a la Relatividad Espacial", de la colección "Vídeos de divulgación".)

EL PLAN

- 1.- PRINCIPIOS DE LA RELATIVIDAD
- 2.- TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ
- 3.- DEFINICIÓN DE DISTANCIA EN EL ESPACIO ORDINARIO
- 4.- DEFINICIÓN DE DISTANCIA EN EL ESPACIO-TIEMPO
- 5.- TIEMPO PROPIO – DILATACIÓN DEL TIEMPO
- 6.- CUADRIMOMENTO
- 7.- ENERGÍA $\rightarrow E = mc^2$

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

o Mismo evento descrito por dos observadores A y B con movimiento relativo a velocidad constante.

$$\begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix}$$

a), b) y c) implican:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ps-qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} &= \frac{1}{ps-qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Imposición de d)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_B \\ ct_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ ct_A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_B \\ ct_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} pt_A + cqt_A \\ rt_A + cpt_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \frac{r+cq}{p+cq} \Rightarrow pc + c^2q = r + cp \Rightarrow r = c^2q \Rightarrow q = \frac{-vp}{c^2}$$

Substituyéndolo todo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} &= p \begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} &= \frac{1}{p(1-\frac{v^2}{c^2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suposiciones previas:

- a) El espacio es homogéneo e isótropo.
- b) El tiempo es homogéneo.

PRINCIPIOS DE LA RELATIVIDAD

Suposiciones de la Relatividad de Einstein:

c) Todos los observadores que se desplazan a velocidad constante uno de otro (observadores inerciales) son "equivalentes" en el sentido de que experimentan las mismas leyes generales de la naturaleza.

d) Todo observador mide la misma velocidad para la luz independiente de la velocidad de la fuente.

Imposición velocidad relativa v:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_B \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ vt_A \end{pmatrix} \Rightarrow r = -sv \\ \begin{pmatrix} t_B \\ -vt_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = -vp \\ &\Rightarrow p = s \end{aligned}$$

Pero c) obliga a que la transformación y su inversa tengan la misma forma excepto el cambio de signo en la velocidad relativa. Hemos de obligar a que:

$$p = \frac{1}{p(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

La solución a esta ecuación es: $p = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Llegamos a las transformaciones de Lorentz:

$$t_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}v^2}} \left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A \right)$$

$$x_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}v^2}} (-vt_A + x_A)$$

Normalmente se le llama $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}v^2}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$ con lo que:

$$t_B = \gamma \left(t_A - \frac{\beta}{c}x_A \right)$$

$$x_B = \gamma (-\beta ct_A + x_A)$$

PRIMERA CONCLUSIÓN

Cada punto del espacio tiempo representa un **EVENTO**. Cada **observador inercial** asigna un par de números (**tiempo y posición**) que deben estar relacionados por las transformaciones de **LORENTZ** para preservar los **principios de relatividad** y la **homogeneidad** y la **isotropía** del espacio.

¿Por qué no se detectó antes?

Porque la velocidad de la luz es enorme $c=3 \times 10^8$ m/s. Por lo que:

Galileo $t_B \simeq t_A$
 $x_B = -vt_A + x_A$

DEFINICIÓN DE DISTANCIA EN EL ESPACIO ORDINARIO

Dos puntos del espacio

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

PASOS PARA CALCULAR LA DISTANCIA

1) Restamos

$$\begin{pmatrix} \Delta x^A \\ \Delta y^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^A \\ y_2^A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^A \\ y_1^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^A - x_1^A \\ y_2^A - y_1^A \end{pmatrix}$$

2) Lo multiplicamos por él mismo

$$\begin{pmatrix} \Delta x^A & \Delta y^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^A \\ \Delta y^A \end{pmatrix} = (x_1^A - x_2^A)^2 + (y_1^A - y_2^A)^2$$

en donde la 'regla de multiplicación escalar es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Otro observador 'rotado' estará de acuerdo?

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotaremos los dos puntos y volveremos a calcular la distancia:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^A \\ y_1^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^A \cos \theta + y_1^A \sin \theta \\ y_1^A \cos \theta - x_1^A \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^A \\ y_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^A \cos \theta + y_2^A \sin \theta \\ y_2^A \cos \theta - x_2^A \sin \theta \end{pmatrix}$$

Restamos:

$$\begin{pmatrix} \Delta x^B \\ \Delta y^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^A \cos \theta - x_1^A \cos \theta - y_1^A \sin \theta + y_2^A \sin \theta \\ y_2^A \cos \theta - y_1^A \cos \theta + x_1^A \sin \theta - x_2^A \sin \theta \end{pmatrix}$$

Coinciden!

$$\begin{pmatrix} \Delta x^B & \Delta y^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^B \\ \Delta y^B \end{pmatrix} = (x_1^A - x_2^A)^2 + (y_1^A - y_2^A)^2$$

CONCLUSIÓN

Existe una cantidad numérica (**distancia al cuadrado**) asociada a **dos puntos** cualesquiera del espacio que es **independiente del estado de rotación del observador**, es decir, todo observador mide lo mismo.

DEFINICIÓN DE DISTANCIA EN EL ESPACIO-TIEMPO

PREGUNTA

¿Existe alguna cantidad numérica asociada a dos puntos del **espacio tiempo** en la que estén de acuerdo todos los **observadores inerciales**?

RESPUESTA

Sí, pero no es exactamente igual a la del espacio ordinario.



$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

(se puede demostrar sustituyendo las transformaciones de Lorentz)

¿Cuál es la 'regla de multiplicación' (métrica)?

Es decir, ¿qué matriz tenemos que poner entre dos 'eventos' para que al multiplicar dé la 'distancia al cuadrado'?

$$\begin{pmatrix} M & P \\ P & Q \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \Delta t & \Delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & P \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

Desarrollando:

$$M(\Delta t)^2 + Q(\Delta x)^2 + 2P\Delta t\Delta x = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

Por lo que:

$$M = -c^2$$

$$Q = 1$$

$$P = 0$$

Así pues la métrica del espacio tiempo es:

$$g = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TIEMPO PROPIO – DILATACIÓN DEL TIEMPO

Dos observadores con velocidad relativa v

$$-c^2(\Delta t_A)^2 + (\Delta x_A)^2 = -c^2(\Delta t_B)^2 + (\Delta x_B)^2$$

Una mosca está en el origen de coordenadas de B todo el rato:

$$-c^2(\Delta t_A)^2 + (v\Delta t_A)^2 = -c^2(\Delta t_B)^2 + (0)^2$$

$$(-c^2 + v^2)(\Delta t_A)^2 = -c^2(\Delta t_B)^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta t_A)^2 = (\Delta t_B)^2$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_A = \Delta t_B$$

$$\Delta t_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_B$$

CUADRIMOMENTO

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = \text{IGUAL PARA TODO OBSERVADOR}$$

$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \text{IGUAL PARA TODO OBSERVADOR}$$

$$m = \text{IGUAL PARA TODO OBSERVADOR}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

↓

$$m^2 \frac{-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2}{(\Delta \tau)^2} = \text{IGUAL PARA TODO OBSERVADOR}$$

Resulta que da:

$$m^2 \frac{-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2}{(\Delta \tau)^2} = -m^2 c^2$$

Desarrollando un poco:

$$-c^2(m\gamma)^2 + (m\gamma u)^2 = -m^2 c^2$$

Ejemplo numérico

EX: Si el observador B va al 99% de la velocidad de la luz, y si el reloj de la mosca marca un entonces el reloj del observador A marca:

$$\Delta t_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_B$$

$$\Delta t_B = 1s$$

$$\Delta t_A = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} \cdot 1 = 7.0888s$$

$$\Delta t_A = \gamma \Delta t_B$$

Definimos el tiempo propio de la mosca $\Delta \tau = \Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\gamma}$

comparando:

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \leftrightarrow -c^2(m\gamma)^2 + (m\gamma u)^2 = -m^2 c^2$$

Interpretamos $\begin{pmatrix} m\gamma \\ \gamma mu \end{pmatrix}$ como un vector Lorentz!

Interpretación de sus componentes

Velocidades pequeñas

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{u^2}{2c^2}$$

Ejemplo numérico

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 0.1^2}} = 1.005$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 0.1^2}} \approx 1 + \frac{0.1^2}{2} = 1.005$$

$$\gamma mu = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx mu \rightarrow p \equiv \gamma mu$$

ENERGÍA y MOMENTO RELATIVISTA

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{u^2}{2c^2} \rightarrow m\gamma \approx m + \frac{mu^2}{2c^2}$$

$$E \equiv m\gamma c^2 \leftarrow m\gamma c^2 \approx mc^2 + \frac{mu^2}{2}$$

Por lo que:

$$\begin{pmatrix} m\gamma \\ \gamma mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c^2} \\ p \end{pmatrix} \rightarrow -c^2 \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 + (p)^2 = -m^2 c^2$$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

ENERGÍA y MASA RELATIVIDAD

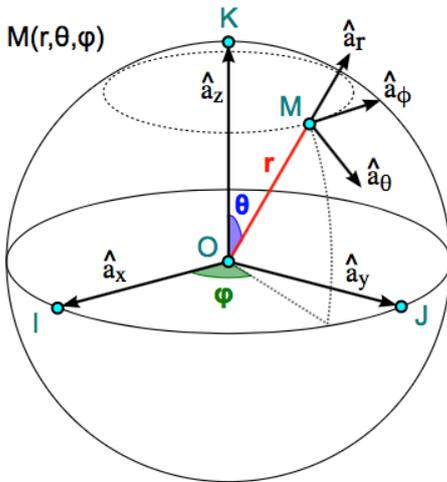
$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$



Si el objeto está en reposo $u = 0 \Rightarrow p = 0$

$$E = mc^2$$

APÉNDICE VI: COORDENADAS ESFÉRICAS. (Video-curso de Javier García de *Mini curso de MECÁNICA CUÁNTICA (A lo Feynman)*, "42-Dedución del Laplaciano en coordenadas esféricas", en sus primeros 10 minutos).



La mayoría de los físicos, ingenieros y matemáticos no norteamericanos escriben:

- ϕ , el azimut : de 0° a 360°
- θ , la colatitud : de 0° a 180°

Esta es la convención que se sigue en este artículo. En el sistema internacional, los rangos de variación de las tres coordenadas son:

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

La coordenada radial es siempre positiva. Si reduciendo el valor de r llega a alcanzarse el valor 0, a partir de ahí, r ; vuelve a aumentar, pero θ pasa a valer $\pi - \theta$ y φ aumenta o disminuye en π radianes.

Relación con las coordenadas cartesianas



Sobre los conjuntos abiertos:

$$U = \{(r, \theta, \varphi) | r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad \text{y} \quad V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$$

Existe una correspondencia unívoca $F : V \rightarrow U$ entre las coordenadas cartesianas y las esféricas, definidas por las relaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) & z > 0 \\ \frac{\pi}{2} & z = 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) & z < 0 \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \text{ y } y > 0 \text{ (1}^\circ \text{ Q)} \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \text{ y } y < 0 \text{ (4}^\circ \text{ Q)} \\ \frac{\pi}{2} \text{sgn}(y) & x = 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \text{ (2}^\circ \text{ y 3}^\circ \text{ Q)} \end{cases}$$

Estas relaciones se hacen singulares cuando tratan de extenderse al propio eje z , donde $x^2 + y^2 = 0$, en el cual ϕ , no está definida. Además, ϕ no es continua en ningún punto (x, y, z) tal que $x = 0$.

La función inversa F^{-1} entre los dos mismos abiertos puede escribirse en términos de las relaciones inversas:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

Base coordenada [\[editar \]](#)

A partir del sistema de coordenadas esféricas puede definirse una **base vectorial** en cada punto del espacio, mediante los vectores tangentes a las líneas coordenadas. Esta nueva base puede relacionarse con la base fundamental de las coordenadas cartesianas mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{aligned}$$

e inversamente

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{y} &= \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{z} &= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

En el cálculo de esta base se obtienen los **factores de escala**

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

Disponiendo de la base de coordenadas esféricas se obtiene que la expresión del vector de posición en estas coordenadas es

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

Nótese que no aparecen término en $\hat{\varphi}$ o $\hat{\theta}$. La dependencia en estas coordenadas está *oculta* en el vector \hat{r} .

Diferencial de línea [editar]

Un desplazamiento infinitesimal, expresado en coordenadas esféricas, viene dado por

$$d\vec{r} = h_r dr \hat{r} + h_\theta d\theta \hat{\theta} + h_\varphi d\varphi \hat{\varphi} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$$

Diferenciales de superficie [editar]

La expresión general de un diferencial de superficie en coordenadas curvilíneas es complicada. Sin embargo, para el caso de que se trate de una superficie coordenada, $q_3 = \text{cte}$. el resultado es

$$d\vec{S}_{q_3=\text{cte}} = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{q}_3$$

y expresiones análogas para las otras dos superficies coordenadas.

En el caso particular de las coordenadas esféricas, los diferenciales de superficie son

- $r=\text{cte}$: $d\vec{S}_{r=\text{cte}} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$
- $\theta=\text{cte}$: $d\vec{S}_{\theta=\text{cte}} = r \sin \theta dr d\varphi \hat{\theta}$
- $\varphi=\text{cte}$: $d\vec{S}_{\varphi=\text{cte}} = r dr d\theta \hat{\varphi}$

Diferencial de volumen [editar]

El volumen de un elemento en coordenadas curvilíneas equivale al determinante del **jacobiano** de la transformación, multiplicado por los tres diferenciales. El jacobiano, a su vez, es igual al producto de los tres factores de escala, por lo que

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

que para coordenadas esféricas en las que el ángulo vertical empieza en el eje z da

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

y en las que el ángulo vertical empieza en el plano XY da

$$dV = r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

Operadores diferenciales en coordenadas esféricas [editar]

El **gradiente**, la **divergencia**, el **rotacional** y el **laplaciano** poseen expresiones particulares en coordenadas esféricas. Estas son:

- Gradiente

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

- Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\varphi)}{\partial \varphi}$$

- Rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

- Laplaciano

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

